Premières équations

♦ **EQU.1** On considère l'égalité ci-dessous où x est un nombre réel.

$$5x+2=x+10.$$

1) Comment s'appelle cette égalité ?

2) L'égalité est-elle vraie si $x=3$?

3) 0 est-il une solution de cette équation ?

4) Résoudre cette équation.

☞ **Correction exercice 1 :**

1) Cette égalité est une équation.

2) On calcule **séparément** :
- $5\times 3+2=17$;
- $3+10=12$.

Donc l'égalité $5x+2=x+10$ est fausse si $x=3$.

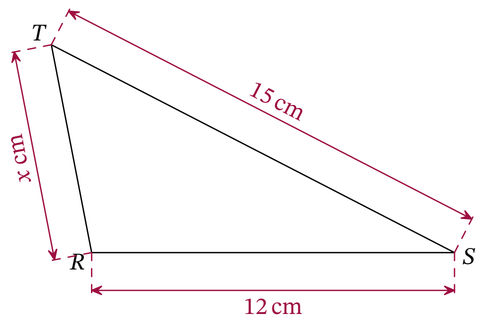
3) On calcule **séparément** :
- $5\times 0+2=2$;
- $0+10=10$.

0 n'est donc pas une solution de cette équation.

4)
$$\begin{aligned} & 5x+2=x+10 \\ \iff\ & 4x=8 \\ \iff\ & x=2. \end{aligned}$$

L'équation $5x+2=x+10$ admet donc une unique solution : $x=2$.

♦ **EQU.2** Le triangle RST ci-dessous a un périmètre de 34 cm.



1) Écrire une égalité faisant intervenir la longueur x.

2) En résolvant l'équation ainsi obtenue, déterminer quelle est la longueur RT.

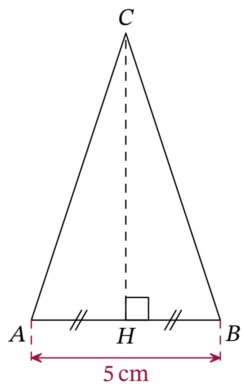
☞ **Correction exercice 2 :**

1) Le périmètre du triangle RST doit être égal à 34 cm donc $x+12+15=34$.

2)
$$\begin{aligned} & x+12+15=34 \\ \iff\ & x+27=34 \\ \iff\ & x=7. \end{aligned}$$

La longueur RT vaut donc 7 cm.

♦ **EQU.3** On considère le triangle ABC ci-dessous, isocèle en C. On sait que son aire est de 40 cm^2.



1) Justifier que si H est le milieu de [AB], alors (CH) est perpendiculaire à (AB).

2) Écrire une égalité faisant intervenir la longueur CH que l'on renommera x.

3) En résolvant l'équation ainsi obtenue, déterminer quelle est la longueur CH.

4) À l'aide du théorème de Pythagore, calculer la longueur AC.

☞ **Correction exercice 3 :**

1) ABC étant isocèle en B, la médiatrice de [AB] est également la hauteur issue de C donc (CH) est perpendiculaire à [AB].

2) L'aire du triangle ABC étant de 40 cm^2 :

$$\frac{\text{AB}\times\text{CH}}{2}=40.$$

3)
$$\begin{aligned} & \frac{\text{AB}\times\text{CH}}{2}=40 \\ \iff\ & \frac{5\times\text{CH}}{2}=40 \\ \iff\ & 5\times\text{CH}=80 \\ \iff\ & \text{CH}=16. \end{aligned}$$

Donc CH vaut 16 cm.

4) AHC étant rectangle en C, d'après le théorème de Pythagore :
$$\begin{aligned} & \text{AC}^2=\text{AH}^2+\text{HC}^2 \\ \iff\ & \quad =2{,}5^2+16^2 \\ \iff\ & \quad =262{,}25. \end{aligned}$$

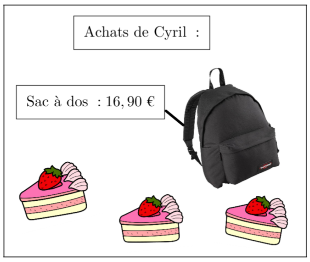
Or AC étant une longueur, on a AC $\geqslant 0$ donc :

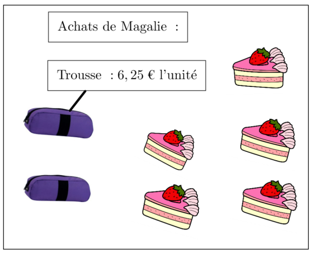
$$AC=\sqrt{262{,}25}\approx 16{,}19\text{ cm}.$$

♦ **EQU.4** Magalie et Cyril sont allés faire des courses. Dans ce magasin, toutes les parts de gâteau ont le même prix. Cyril a acheté un sac à dos et trois parts de gâteau.

Magalie a acheté deux trousses et cinq parts de gâteau. À la fin de leurs courses, ils se rendent compte qu'ils ont payé exactement la même somme.

Quel est le prix d'une part de gâteau ?





☞ **Correction exercice 4 :** Notons x le prix en euros d'une part de gâteau. Alors :

- Cyril a acheté pour $16{,}9 + 3x$ euros;
- Magalie a acheté pour $2 \times 6{,}25 + 5x$ euros.

Donc l'équation à résoudre est $16{,}9 + 3x = 12{,}5 + 5x$:

$$\begin{aligned} & 16{,}9 + 3x = 12{,}5 + 5x \\ \iff & -2x = -4{,}4 \\ \iff & x = 2{,}2. \end{aligned}$$

Une part de gâteau coûte donc 2,20 euros.

♦ **EQU.5** Simon et son père ont 26 ans d'écart. Dans 4 ans, la somme de leurs âges sera égale à 80. On cherche l'âge de Simon et on la note x (en années).

1) Quel est l'âge du père de Simon aujourd'hui, en fonction de x?

2) Exprimer l'âge de Simon et l'âge de son père dans quatre ans en fonction de x.

3) En déduire que x doit vérifier l'équation

$$2x + 34 = 80.$$

4) En déduire l'âge de Simon.

☞ **Correction exercice 5 :**

1) L'âge du père de Simon est $26 + x$.

2) Age de Simon dans quatre ans : $x + 4$, âge de son père dans quatre ans : $30 + x$.

3) On a :

$$\begin{aligned} & 30 + x + x + 4 = 80 \\ \iff & 2x + 34 = 80. \end{aligned}$$

4) On résout l'équation ci-dessus :

$$\begin{aligned} & 2x + 34 = 80 \\ \iff & 2x = 46 \\ \iff & x = 23. \end{aligned}$$

Simon a donc 26 ans.

Équations pour le plaisir

♦ **EQU.6** (**Très facile**)

1) $x + 2 = 5$

2) $x - 4 = 9$

3) $x - \frac{1}{3} = 1$

4) $x + \frac{5}{4} = \frac{3}{7}$

☞ **Correction exercice 6 :**

1) $x + 2 = 5$:

$$\begin{aligned} & x + 2 = 5 \\ \iff & x = 3. \end{aligned}$$

2) $x - 4 = 9$:

$$\begin{aligned} & x - 4 = 9 \\ \iff & x = 13. \end{aligned}$$

3) $x - \frac{1}{3} = 1$:

$$\begin{aligned} & x - \frac{1}{3} = 1 \\ \iff & x = 1 + \frac{1}{3} \\ \iff & x = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

4) $x + \frac{5}{4} = \frac{3}{7}$:

$$\begin{aligned} & x = \frac{3}{7} \\ \iff & x = \frac{3}{7} - \frac{5}{4} \\ \iff & x = -\frac{23}{28}. \end{aligned}$$

♦ **EQU.7** (**Facile**)

1) $3x = 1$

2) $8x = 5$

3) $\frac{1}{4}x = -2$

4) $\frac{3}{7}x = \frac{6}{14}$

☞ **Correction exercice 7 :**

1) $3x = 1$:

$$\begin{aligned} & 3x = 1 \\ \iff & x = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

2) $8x = 5$:

$$\begin{aligned} & 8x = 5 \\ \iff & x = \frac{5}{8}. \end{aligned}$$

3) $\frac{1}{4}x = -2$:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4}x = -2 \\ \iff & x = -8. \end{aligned}$$

4) $\frac{3}{7}x = \frac{6}{14}$:

$$\begin{aligned} & \frac{3}{7}x = \frac{6}{14} \\ \iff & x = \frac{6}{14} \times \frac{7}{3} \\ \iff & x = 1. \end{aligned}$$

♦ **EQU.8** (**Tranquille**)

1) $2x + 1 = 0$

2) $7x - 3 = 0$

3) $8 - 2x = 0$

4) $10 + 3x = 0$

☞ **Correction exercice 8 :**

1) $2x + 1 = 0$:

$$\begin{aligned} & 2x + 1 = 0 \\ \iff & x = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

2) $7x - 3 = 0$:

$$\begin{aligned} & 7x - 3 = 0 \\ \iff\quad & x = \frac{3}{7}. \end{aligned}$$

3) $8 - 2x = 0$:

$$\begin{aligned} & 8 - 2x = 0 \\ \iff\quad & x = 4. \end{aligned}$$

4) $10 + 3x = 0$:

$$\begin{aligned} & 10 + 3x = 0 \\ \iff\quad & x = -\frac{10}{3}. \end{aligned}$$

♦ EQU.9 (Premier degré)

1) $3x + 7 = 2x - 1$

2) $2x - 4 = 3 + 5x$

3) $4x - 9 = 2x + \frac{2}{3}$

4) $\frac{3}{4}x - \frac{7}{9} = \frac{2}{5}x + 1$

Correction exercice 9 :

1) $3x + 7 = 2x - 1$:

$$\begin{aligned} & 3x + 7 = 2x - 1 \\ \iff\quad & x = -8. \end{aligned}$$

2) $2x - 4 = 3 + 5x$:

$$\begin{aligned} & 2x - 4 = 3 + 5x \\ \iff\quad & -3x = 7 \\ \iff\quad & x = -\frac{7}{3}. \end{aligned}$$

3) $4x - 9 = 2x + \frac{2}{3}$:

$$\begin{aligned} & 4x - 9 = 2x + \frac{2}{3} \\ \iff\quad & 2x = \frac{2}{3} + 9 \\ \iff\quad & x = \frac{29}{6}. \end{aligned}$$

4) $\frac{3}{4}x - \frac{7}{9} = \frac{2}{5}x + 1$:

$$\begin{aligned} & \frac{3}{4}x - \frac{7}{9} = \frac{2}{5}x + 1 \\ \iff\quad & \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{5}\right)x = 1 + \frac{7}{9} \\ \iff\quad & \frac{7}{20}x = \frac{16}{9} \\ \iff\quad & x = \frac{320}{63}. \end{aligned}$$

♦ EQU.10 (Premier degré)

1) $4(x + 2) = x + 17$

2) $-3(2x + 1) = 2x + 13$

3) $5(4x - 7) = -5x + 15$

4) $-(2x - 10) = 11x + 49$

Correction exercice 10 :

1) $4(x + 2) = x + 17$:

$$\begin{aligned} & 4(x + 2) = x + 17 \\ \iff\quad & 3x = 9 \\ \iff\quad & x = 3. \end{aligned}$$

2) $-3(2x + 1) = 2x + 13$:

$$\begin{aligned} & -3(2x + 1) = 2x + 13 \\ \iff\quad & -8x = 16 \\ \iff\quad & x = -2. \end{aligned}$$

3) $5(4x - 7) = -5x + 15$:

$$\begin{aligned} & 5(4x - 7) = -5x + 15 \\ \iff\quad & 25x = 50 \\ \iff\quad & x = 2. \end{aligned}$$

4) $-(2x - 10) = 11x + 49$:

$$\begin{aligned} & -(2x - 10) = 11x + 49 \\ \iff\quad & -13x = 39 \\ \iff\quad & x = -\frac{39}{13} \\ \iff\quad & x = -3. \end{aligned}$$

♦ EQU.11 (Premier degré)

1) $3(x + 5) - 3 = 2(x + 7) + 4x - 9$

2) $-4(3x + 7) + 15 = 7(2x + 3) - 21$

Correction exercice 11 :

1) $3(x + 5) - 3 = 2(x + 7) + 4x - 9$:

$$\begin{aligned} & 3(x + 5) - 3 = 2(x + 7) + 4x - 9 \\ \iff\quad & 3x + 15 - 3 = 2x + 14 + 4x - 9 \\ \iff\quad & 3x + 12 = 6x + 5 \\ \iff\quad & -3x + 12 = 5 \\ \iff\quad & -3x = -7 \\ \iff\quad & x = \frac{7}{3}. \end{aligned}$$

2) $-4(3x + 7) + 15 = 7(2x + 3) - 21$:

$$\begin{aligned} & -4(3x + 7) + 15 = 7(2x + 3) - 21 \\ \iff\quad & -12x - 28 + 15 = 14x + 21 - 21 \\ \iff\quad & -12x - 13 = 14x \\ \iff\quad & -26x - 13 = 0 \\ \iff\quad & -26x = 13 \\ \iff\quad & x = \frac{13}{-26} \\ \iff\quad & x = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Pour l'exercice suivant, on utilisera l'égalité des produits en croix ou la proposition suivante : si a et b sont deux nombres non nuls, alors $a = b$ est équivalent à $\frac{1}{a} = \frac{1}{b}$.

♦ EQU.12 (Premier degré et inverse)

1) $\frac{11}{x} = \frac{7}{22}$

2) $\frac{x}{8} = \frac{3x + 2}{20}$

3) $\frac{7}{2x} = \frac{3}{5x}$

4) $\frac{5x - 2}{x} = \frac{1 + 5x}{x - 1}$

Correction exercice 12 :

1) $\frac{11}{x} = \frac{7}{22}$ (avec $x \neq 0$)

$$\begin{aligned} & \frac{11}{x} = \frac{7}{22} \\ \iff\quad & 11 \times 22 = 7x \\ \iff\quad & x = \frac{242}{7}. \end{aligned}$$

2) $\frac{x}{8} = \frac{3x + 2}{20}$

$$\begin{aligned} \frac{x}{8} &= \frac{3x+2}{20} \\ \iff 20x &= 8(3x+2) \\ \iff 20x &= 24x+16 \\ \iff -4x &= 16 \\ \iff x &= -4. \end{aligned}$$

3) $\dfrac{7}{2x} = \dfrac{3}{5x}$ (attention, $x \neq 0$)

$$\begin{aligned} \frac{7}{2x} &= \frac{3}{5x} \\ \iff 7\cdot 5x &= 3\cdot 2x \\ \iff 35x &= 6x \\ \iff 29x &= 0 \end{aligned}$$

Pas de solution (car $x = 0$ est une valeur interdite).

4) $\dfrac{5x-2}{x} = \dfrac{1+5x}{x-1}$ (avec $x \neq 0$ et $x \neq 1$) :

$$\begin{aligned} \frac{5x-2}{x} &= \frac{1+5x}{x-1} \\ \iff (5x-2)(x-1) &= x(1+5x) \\ \iff 5x^2-7x+2 &= 5x^2+x \\ \iff -8x+2 &= 0 \\ \iff x &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

La valeur $x = \dfrac{1}{4}$ vérifie bien $x \neq 0$ et $x \neq 1$.

♦ EQU.13 (Carrés)

1) $x^2 = 169$

2) $4x^2 + 2 = 102$

3) $9 + x^2 = (x+1)^2$

4) $(x+1)^2 = 144$

☞ **Correction exercice 13 :**

1) $x^2 = 169$:

$$x^2 = 169 \iff \begin{cases} x = 13 \\ \text{ou} \\ x = -13. \end{cases}$$

2) $4x^2 + 2 = 102$

Un petit travail d'abord :

$$\begin{aligned} 4x^2+2 &= 102 \\ \iff 4x^2 &= 100 \\ \iff x^2 &= 25 \end{aligned}$$

Puis :

$$x^2 = 25 \iff \begin{cases} x = 5 \\ \text{ou} \\ x = -5. \end{cases}$$

3) $9 + x^2 = (x+1)^2$

Un petit travail :

$$\begin{aligned} 9+x^2 &= (x+1)^2 \\ \iff 9+x^2 &= x^2+2x+1 \\ \iff 9 &= 2x+1 \\ \iff -2x &= -8 \\ \iff x &= 4. \end{aligned}$$

C'était une « fausse » équation du second degré !

4) $(x+1)^2 = 144$

Ici, il faut procéder avec méthode :

$$(x+1)^2 = 144 \iff \begin{cases} x+1 = \sqrt{144} \\ \text{ou} \\ x+1 = -\sqrt{144} \end{cases}$$

or, $\sqrt{144} = 12$ donc :

$$(x+1)^2 = 144 \iff \begin{cases} x = 11 \\ \text{ou} \\ x = -13. \end{cases}$$

♦ EQU.14 (Équations produits)

1) $(2-x)(3+x) = 0$

2) $(x+9)(2x-3) = 0$

3) $(x+1)(x-2)(x+3) = 0$

4) $(3x^2-27)(1-x) = 0$

5) $(2x+5)^2 = 0$

6) $(x^2+1)^2 = 0$

☞ **Correction exercice 14 :**

1) $(2-x)(3+x) = 0$

$$(2-x)(3+x) = 0 \iff \begin{cases} 2-x = 0 \\ \text{ou} \\ 3+x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2 \\ \text{ou} \\ x = -3. \end{cases}$$

2) $(x+9)(2x-3) = 0$

$$(x+9)(2x-3) = 0 \iff \begin{cases} x+9 = 0 \\ \text{ou} \\ 2x-3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -9 \\ \text{ou} \\ x = \frac{3}{2}. \end{cases}$$

3) $(x+1)(x-2)(x+3) = 0$

$$(x+1)(x-2)(x+3) = 0 \iff \begin{cases} x+1 = 0 \\ \text{ou} \\ x-2 = 0 \\ \text{ou} \\ x+3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -1 \\ \text{ou} \\ x = 2 \\ \text{ou} \\ x = -3. \end{cases}$$

4) $(3x^2-27)(1-x) = 0$

$$(3x^2-27)(1-x) = 0 \iff \begin{cases} 3x^2-27 = 0 \\ \text{ou} \\ 1-x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 = 9 \\ \text{ou} \\ x = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 3 \\ \text{ou} \\ x = -3 \\ \text{ou} \\ x = 1. \end{cases}$$

5) $(2x+5)^2 = 0$

$$(2x+5)^2 = 0 \iff 2x+5 = 0 \iff x = -\frac{5}{2}.$$

6) $(x^2+1)^2 = 0$

$$(x^2+1)^2 = 0 \iff x^2+1 = 0.$$

Pas de solution réelle (pour tout réel x, $x^2 \geqslant 0$ donc $x^2+1 > 0$).

On pensera à factoriser le membre de gauche pour résoudre les équations de l'exercice suivant. Pour les deux dernières, penser à l'identité remarquable

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b).$$

♦ EQU.15 (Équations produits)

1) $8x^2 + 3x = 0$

2) $15x^2 + 5x = 0$

3) $49x^2 - 121 = 0$

4) $16 - 9x^2 = 0$

☞ **Correction exercice 15 :**

1) $8x^2 + 3x = 0$

$$8x^2+3x=0 \iff x(8x+3)=0$$

$$\iff \begin{cases} x=0 \\ \text{ou} \\ 8x+3=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=0 \\ \text{ou} \\ x=-\dfrac{3}{8}. \end{cases}$$

2) $15x^2+5x=0$

$$15x^2+5x=0 \iff 5x(3x+1)=0$$

$$\iff \begin{cases} 5x=0 \\ \text{ou} \\ 3x+1=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=0 \\ \text{ou} \\ x=-\dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

3) $49x^2-121=0$

$$49x^2-121=0 \iff (7x-11)(7x+11)=0$$

$$\iff \begin{cases} 7x-11=0 \\ \text{ou} \\ 7x+11=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=\dfrac{11}{7} \\ \text{ou} \\ x=-\dfrac{11}{7}. \end{cases}$$

4) $16-9x^2=0$

$$16-9x^2=0 \iff (4-3x)(4+3x)=0$$

$$\iff \begin{cases} 4-3x=0 \\ \text{ou} \\ 4+3x=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=\dfrac{4}{3} \\ \text{ou} \\ x=-\dfrac{4}{3}. \end{cases}$$

Petits problèmes algébriques

Pour commencer, trois exercices sur le même thème, l'indication du premier permettant de démarrer lorsqu'on ~~n'a pas réfléchi en classe~~ ne sait pas quoi faire.

♦ **EQU.16** Quels sont les nombres réels tels que leur double augmenté de 5 soit égal à leur triple diminué de 7 ?

☞ **Indications exercice 16 :** Si x est un nombre réel, son double augmenté de 5 est $2x+5$.

☞ **Correction exercice 16 :** Soit x un nombre réel. Son double augmenté de 5 est $2x+5$ et son triple diminué de 7 est $3x-7$.

L'égalité s'écrit donc :

$$2x+5=3x-7.$$

On résout donc :

$$\begin{aligned} & 2x+5=3x-7 \\ \iff & -x=-12 \\ \iff & x=12. \end{aligned}$$

Le nombre réel cherché est donc $x=12$.

♦ **EQU.17** Existe-t-il un nombre tel que son quintuple diminué de 8 soit égal à son triple augmenté de 10 ?

☞ **Correction exercice 17 :** Soit x un nombre réel. Son quintuple diminué de 8 est $5x-8$ et son triple augmenté de 10 est $3x+10$.

L'égalité s'écrit donc : $5x-8=3x+10.$

On résout donc :

$$\begin{aligned} & 5x-8=3x+10 \\ \iff & 2x=18 \\ \iff & x=9. \end{aligned}$$

Il existe donc un unique nombre réel $x=9$ vérifiant la condition.

♦ **EQU.18** J'aoute 21 au double d'un nombre, je trouve le même résultat que si je retranche le triple de ce nombre à 13. Quel est ce nombre ?

☞ **Correction exercice 18 :** Soit x un nombre réel. Le double de ce nombre augmenté de 21 est $2x+21$ et le triple de ce nombre retranché à 13 est $13-3x$.

L'égalité s'écrit donc : $2x+21=13-3x.$

On résout donc :

$$\begin{aligned} & 2x+21=13-3x \\ \iff & 5x=-8 \\ \iff & x=-\frac{8}{5}. \end{aligned}$$

Le nombre réel cherché est donc $x=-\dfrac{8}{5}$.

♦ **EQU.19** Avec l'argent qu'il possède, Pierre veut acheter des livres qui valent tous le même prix. S'il en achète 3, il lui reste 28 €. S'il en achète 4, il lui manque 1 €.

Quel est le prix d'un livre ?

☞ **Indications exercice 19 :** Si x est le prix d'un livre, Pierre a $3x+28$ euros en poche, qui est aussi égal à $4x-1$ euros.

☞ **Correction exercice 19 :** Soit x le prix d'un livre (en euros). Pierre a 3 livres et 28 € restants, donc il possède $3x+28$ euros. S'il en achète 4, il lui manque 1 €, donc il doit dépenser $4x-1$ euros. Ces deux sommes sont égales.

L'égalité s'écrit donc : $3x+28=4x-1.$

On résout donc :

$$\begin{aligned} & 3x+28=4x-1 \\ \iff & -x=-29 \\ \iff & x=29. \end{aligned}$$

Le prix d'un livre est donc de 29 €.

♦ **EQU.20** Émilie veut acheter plusieurs livres d'une même collection qui valent tous le même prix. Émilie : « Avec l'argent dont je dispose, si j'achète 4 livres il me reste 30 €, mais si j'en achète 6 il me manque 60 €».

De quelle somme d'argent dispose Émilie avant d'acheter les livres ?

☞ **Indications exercice 20 :** S'inspirer de l'exercice précédent.

☞ **Correction exercice 20 :** Soit x le prix d'un livre (en euros). Émilie dispose d'une somme S (en euros). S'il achète 4 livres, il lui reste 30 €, donc $S=4x+30$. S'il en achète 6, il lui manque 60 €, donc $S=6x-60$. Ces deux expressions sont égales.

L'égalité s'écrit donc : $4x+30=6x-60.$

On résout donc :

$$\begin{aligned} & 4x+30=6x-60 \\ \iff & -2x=-90 \\ \iff & x=45. \end{aligned}$$

Émilie dispose donc de $S=4\times 45+30=210$ euros.

♦ **EQU.21** En additionnant un nombre entier, son double et son triple, je trouve 1998. Quel est ce nombre ?

☞ **Correction exercice 21 :** Soit x le nombre entier cherché. On additionne ce nombre, son double et son triple : on obtient $x+2x+3x=6x$. La somme vaut 1998.

L'égalité s'écrit donc : $6x = 1998.$

On résout donc :
$$\begin{aligned} 6x &= 1998 \\ \iff x &= 333. \end{aligned}$$

Le nombre entier cherché est donc $x = 333$.

Quelques exercices utilisant la distributivité.

♦ **EQU.22** Quel nombre faut-il ajouter à 100 et à 20, pour que le plus grand nombre soit le triple du plus petit ?

☞ **Correction exercice 22 :** Soit x le nombre qu'on ajoute à 100 et à 20. Le plus grand nombre devient $100 + x$ et le plus petit devient $20 + x$. On veut que le plus grand soit le triple du plus petit.

L'égalité s'écrit donc : $100 + x = 3(20 + x).$

On résout donc :
$$\begin{aligned} 100 + x &= 60 + 3x \\ \iff 40 &= 2x \\ \iff x &= 20. \end{aligned}$$

Le nombre qu'il faut ajouter est donc $x = 20$.

♦ **EQU.23** Je veux retrancher 100 et 10 à un même nombre, et que le plus grand reste soit le quadruple du plus petit. Quel nombre faut-il choisir ?

☞ **Correction exercice 23 :** Soit x le nombre auquel on retranche 100 et 10. Les deux restes sont $x - 100$ et $x - 10$. Le plus grand reste est $x - 10$.

L'égalité s'écrit donc : $x - 10 = 4(x - 100).$

On résout donc :
$$\begin{aligned} x - 10 &= 4x - 400 \\ \iff -3x &= -390 \\ \iff x &= 130. \end{aligned}$$

Le nombre qu'il faut choisir est donc $x = 130$.

♦ **EQU.24** On veut ajouter à 20, et retrancher à 100, un même nombre de façon que le premier nombre obtenu soit le quadruple du second. Quel nombre faut-il choisir ?

☞ **Correction exercice 24 :** Soit x le nombre qu'on ajoute à 20 et qu'on retranche à 100. Les deux nouveaux nombres sont $20 + x$ et $100 - x$. On veut que le premier soit le quadruple du second.

L'égalité s'écrit donc : $20 + x = 4(100 - x).$

On résout donc :
$$\begin{aligned} 20 + x &= 400 - 4x \\ \iff 5x &= 380 \\ \iff x &= 76. \end{aligned}$$

Le nombre qu'il faut choisir est donc $x = 76$.

♦ **EQU.25** Une grand mère a 81 ans et sa petite fille a 9 ans. Dans combien de temps l'âge de la grand mère sera-t-il le quadruple de l'âge de la petite fille ?

☞ **Correction exercice 25 :** Soit x le nombre d'années à venir. Dans x ans, la grand-mère aura $81 + x$ ans et la petite-fille aura $9 + x$ ans. On veut que l'âge de la grand-mère soit le quadruple de celui de la petite-fille.

L'égalité s'écrit donc : $81 + x = 4(9 + x).$

On résout donc :
$$\begin{aligned} 81 + x &= 36 + 4x \\ \iff 45 &= 3x \\ \iff x &= 15. \end{aligned}$$

Dans 15 ans, la grand-mère aura quatre fois l'âge de sa petite-fille.

♦ **EQU.26** Pierre dit « Il y a 10 ans, j'avais la moitié de l'âge que j'aurai dans 10 ans ». Quel est l'âge de Pierre ?

☞ **Correction exercice 26 :** Soit x l'âge actuel de Pierre. Il y a 10 ans, il avait $x - 10$ ans, et dans 10 ans, il aura $x + 10$ ans. On sait qu'il y a 10 ans, il avait la moitié de l'âge qu'il aura dans 10 ans.

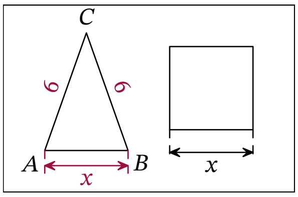
L'égalité s'écrit donc : $x - 10 = \frac{1}{2}(x + 10).$

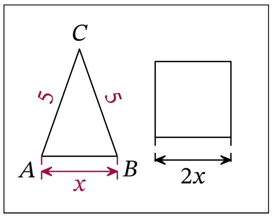
On résout donc :
$$\begin{aligned} 2(x - 10) &= x + 10 \\ \iff 2x - 20 &= x + 10 \\ \iff x &= 30. \end{aligned}$$

Pierre a donc 30 ans.

Petits problèmes géométriques

♦ **EQU.27** Dans chacun des cas ci-dessous, peut-on déterminer x tel que le périmètre du triangle soit égal à celui du carré ?





☞ **Correction exercice 27 :**

1) Le carré a pour côté x (périmètre $4x$) et le triangle a pour côtés x,6,6 (périmètre $x + 12$).

L'égalité des périmètres s'écrit donc : $4x = x + 12.$

On résout donc :
$$\begin{aligned} 4x &= x + 12 \\ \iff 3x &= 12 \\ \iff x &= 4. \end{aligned}$$

Le résultat vérifie bien les contraintes géométriques ($x \geqslant 0$ et $x \leqslant 12$) pour que le triangle de côtés x,6,6 existe.

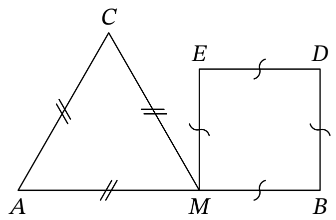
2) Le triangle a pour côtés x,5,5 (périmètre $x + 10$) et le carré a pour côté $2x$ (périmètre $8x$).

L'égalité des périmètres s'écrit donc : $x + 10 = 8x.$

On résout donc :
$$\begin{aligned} x + 10 &= 8x \\ \iff 7x &= 10 \\ \iff x &= \frac{10}{7}. \end{aligned}$$

Le résultat vérifie bien les contraintes géométriques ($x \geqslant 0$ et $x \leqslant 10$) pour que le triangle de côtés x,5,5 existe.

♦ **EQU.28** Déterminer les longueurs de chaque côté dans la figure suivante sachant que le triangle équilatéral et le carré ont le même périmètre et que $AB = 10$ cm.



☞ **Correction exercice 28 :** On considère un triangle équilatéral et un carré ayant le même périmètre. On sait que $AB = 10$ cm et que le point M appartient à $[AB]$. Le côté du triangle équilatéral est AM, et le côté du carré est MB.

Les périmètres étant égaux, on a $3\times AM = 4\times MB$. Or $AM + MB = AB = 10$.

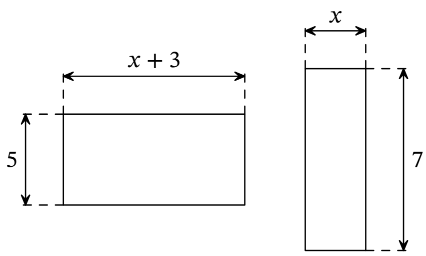
L'égalité s'écrit donc :

On résout donc :
$$\begin{cases} 3AM = 4MB \\ AM + MB = 10 \end{cases}$$
$$\begin{aligned} AM &= \frac{4}{3}MB \\ \iff \frac{4}{3}MB + MB &= 10 \\ \iff \frac{7}{3}MB &= 10 \\ \iff MB &= \frac{30}{7}. \end{aligned}$$

On en déduit : $AM = 10 - MB = 10 - \frac{30}{7} = \frac{40}{7}$.

Ainsi, le côté du carré mesure $\frac{30}{7}$ cm et celui du triangle équilatéral $\frac{40}{7}$ cm.

♦ **EQU.29** Déterminer x pour que la différence entre l'aire du rectangle de droite et celui de gauche soit de cinquante unités d'aires.



☞ **Correction exercice 29 :** Celui de gauche a pour dimensions 5 et $x+3$, et celui de droite a pour dimensions x et 7. On veut que la différence entre leurs aires soit de 50 unités d'aire.

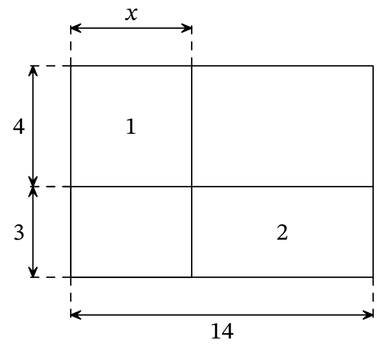
L'égalité s'écrit donc :

$$7x - 5(x+3) = 50.$$

On résout donc :
$$\begin{aligned} 7x - 5(x+3) &= 50 \\ \iff 7x - 5x - 15 &= 50 \\ \iff 2x &= 65 \\ \iff x &= \frac{65}{2}. \end{aligned}$$

Ainsi, $x = \frac{65}{2}$, soit $x = 32{,}5$.

♦ **EQU.30** Déterminer une valeur de x telle que l'aire du rectangle 1 soit égale à l'aire du rectangle 2.



☞ **Correction exercice 30 :** Le premier rectangle a une aire de $4x$, et le second une aire de $(14-x)\times 3$. Ces deux aires sont égales.

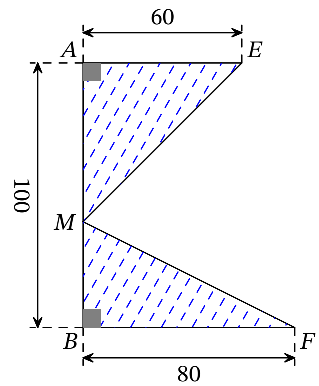
L'égalité s'écrit donc :

$$4x = 3(14-x).$$

On résout donc :
$$\begin{aligned} 4x &= 42 - 3x \\ \iff 7x &= 42 \\ \iff x &= 6. \end{aligned}$$

Les deux rectangles ont donc la même aire lorsque $x = 6$.

♦ **EQU.31** Sachant que dans la figure ci-dessous, les triangles AME et BMF ont la même aire, calculer la longueur AM.



☞ **Correction exercice 31 :** Les deux triangles AME et BMF ont la même aire. On sait que $AB = 100$, $AE = 60$ et $BF = 80$. On cherche la longueur AM.

Les aires étant égales, on a :

$$AM \times AE = MB \times BF.$$

Or $MB = 100 - AM$.

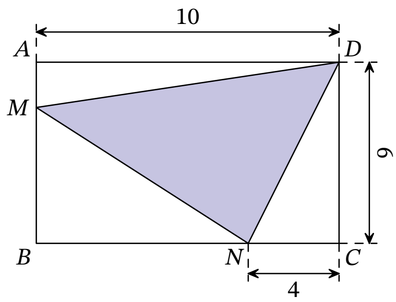
L'égalité s'écrit donc :

$$AM \times 60 = (100 - AM)\times 80.$$

On résout donc :
$$\begin{aligned} 60AM &= 8000 - 80AM \\ \iff 140AM &= 8000 \\ \iff AM &= \frac{8000}{140} = \frac{400}{7}. \end{aligned}$$

Ainsi, $AM = \frac{400}{7}$, soit environ 57,1.

♦ **EQU.32** Sur la figure ci-dessous, on a un rectangle ABCD, M est un point de [AB] et N un point de [BC]. L'aire du triangle MND est de 28 unités d'aire. Quelle est la longueur AM ?



☞ **Correction exercice 32 :** Posons $AM = x$.

L'aire de ADM est $5x$; l'aire de MBN est $3(6 - x)$ et l'aire de NDC est 12.

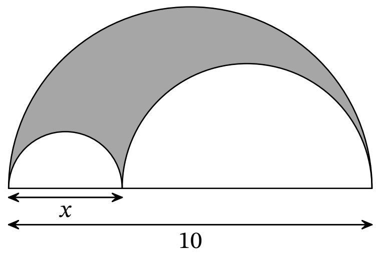
Ainsi, l'aire du triangle MDN est $60 - 5x - 3(6 - x)$ et aussi égale à 28 unités d'aire donc :

$$\begin{aligned} & 60 - 5x - 3(6 - x) - 12 = 28 \\ \iff & -2x = -2 \\ \iff & x = 1. \end{aligned}$$

La longueur AM vaut donc 1.

Problèmes

♦ **EQU.33** Soit x un réel strictement compris entre 0 et 10. Que peut-on dire du périmètre de la figure colorée (formée avec des demi-cercles) ci-dessous ?



☞ **Correction exercice 33 :** La figure colorée est formée de trois demi-cercles, leurs périmètres respectifs sont :

- $\pi \times \frac{x}{2}$;
- $\pi \times \frac{10 - x}{2}$;
- $\pi \times \frac{10}{2}$.

Donc le périmètre de cette figure est égal à

$$\pi \times \frac{x}{2} + \pi \times \frac{10 - x}{2} \pi \times \frac{10}{2} = 5\pi.$$

Il ne dépend donc pas de la longueur x !

♦ **EQU.34** (**Un résultat très surprenant**) On suppose que le sol de la Terre forme une sphère parfaite de rayon R, et qu'on peut étendre un câble le long de l'équateur.

Ce câble étant tendu, on rajoute alors un mètre de longueur à ce câble. À quelle hauteur du sol sera-t-il alors pour être parfaitement tendu ?

☞ **Correction exercice 34 :** Lorsque le câble est tendu sur la Terre, il a pour longueur $2\pi R$ mètres.

Lorsqu'on rajoute alors un mètre de longueur à ce câble, sa nouvelle longueur est de $2\pi R + 1$ mètres. Si on note h la hauteur du sol à laquelle il sera, on a :

$$\begin{aligned} & 2\pi(R + h) = 2\pi R + 1 \\ \iff & 2\pi h = 1 \\ \iff & h = \frac{1}{2\pi}. \end{aligned}$$

Donc la hauteur sera d'environ 16 cm, et plus surprenant encore, elle ne dépend pas du rayon de la Terre !

♦ **EQU.35** Jacques fait un aller-retour en voiture, et on suppose qu'il parcourt la même distance à l'aller et au retour. On suppose de plus qu'à aller, sa vitesse est constante et vaut 60 km.h^{-1}, et qu'au retour elle vaut 40 km.h^{-1}.

Quelle est sa vitesse moyenne sur l'ensemble du parcours ?

☞ **Correction exercice 35 :** On a $d = vt$ où d est la distance parcourue, v la vitesse et t le temps (attention aux unités).

À l'aller, notons d la distance parcourue en km, v_a la distance à l'aller, t_a le temps mis pour parcourir l'aller, et de même pour le retour avec v_r et t_r.

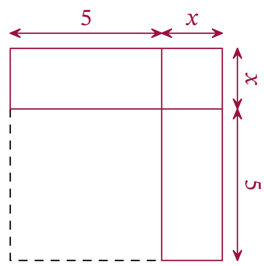
On cherche la vitesse moyenne sur le parcours, soit $\frac{2d}{t_a + t_r}$:

$$\begin{aligned} \frac{2d}{t_a + t_r} &= \frac{2d}{d/v_a + d/v_r} \\ &= \frac{2}{1/60 + 1/40} \\ &= \frac{2 \times 60 \times 40}{100} \\ &= 48. \end{aligned}$$

Sa vitesse moyenne sur l'ensemble du parcours est donc de 48 km.h^{-1}.

♦ **EQU.36** (**Une équation de degré deux**) Al-Kwhârizmî était un mathématicien et astronome persan du IXe siècle. Pour résoudre l'équation $x^2 + 10x = 39$, il proposa la méthode géométrique suivante.

On considère le grand carré avec les dimensions suivantes :



1) Calculer l'aire des deux rectangles et du petit carré pourpres en fonction de x.

2) Calculer l'aire de la partie blanche.

3) Expliquer pourquoi, si x est solution de $x^2 + 10x = 39$, l'aire du grand carré de côté $x + 5$ est de 64.

4) Résoudre l'équation $x^2 + 10x = 39$ revient donc à résoudre l'équation $(x + 5)^2 = 64$. Trouver ainsi les solutions de l'équation $x^2 + 10x = 39$.

☞ **Correction exercice 36 :**

1) Aire de chaque rectangle : $5x$, aire du petit carré : x^2.

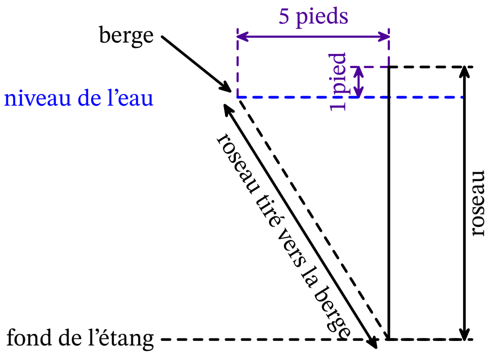
2) La partie blanche a pour aire 25.

3) Si $x^2 + 10x = 39$, alors l'aire du grand carré de côté $x + 5$ vaut $25 + 39 = 64$!

4) $(x+5)^2 = 64 \iff \begin{cases} x+5=8 \\ \text{ou} \\ x+5=-8 \end{cases} \iff \begin{cases} x=3 \\ \text{ou} \\ x=-13. \end{cases}$

♦ **EQU.37** (**Chine, entre** -200 **et** 200) Au centre d'un étang carré de côté 1 toise[1] pousse un roseau qui dépasse de l'eau de 1 pied. On tire sur l'extrémité du roseau jusqu'à la berge, et elle arrive alors exactement au niveau de l'eau. On se demande quelle est la profondeur de l'étang en son centre ?

Parce que je suis vraiment très gentil, un petit dessin représentant la situation :



☞ **Correction exercice 37 :** Si on note x la profondeur de l'étang, alors $(x+1)^2 = 5^2 + x^2$ et :

$$\begin{aligned} & (x+1)^2 = 5^2 + x^2 \\ \iff & x^2 + 2x + 1 = x^2 + 25 \\ \iff & 2x + 1 = 25 \\ \iff & x = 12. \end{aligned}$$

L'étang a donc une profondeur de 12 pieds.

♦ **EQU.38** (**Encore la Chine**) Une corde qui est attachée au sommet d'un arbre vertical dépasse de 3 pieds la longueur de cet arbre. En tirant la corde à son maximum de manière que son extrémité touche le sol, on s'écarte exactement de 8 pieds du tronc de l'arbre.

Quelle est la longueur de la corde ?

☞ **Correction exercice 38 :** Soit x la longueur de l'arbre. Alors :

$$\begin{aligned} & (x+3)^2 = 8^2 + x^2 \\ \iff & 6x + 9 = 64 \\ \iff & 6x = 55 \\ \iff & x = \frac{55}{6} = 9 + \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

La corde a donc pour longueur $12 + \frac{1}{6}$ pieds.

1. toise, pied : mesures chinoises. 1 toise = 10 pieds.

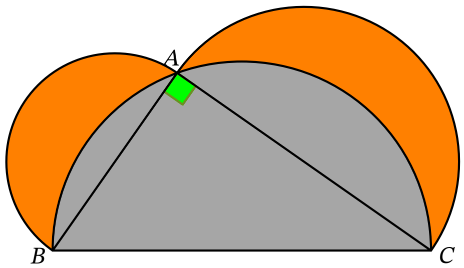
♦ **EQU.39** (**Inde, 12**^{e} **siècle**) Un bambou mesurant 32 coudées et s'élevant sur un terrain plat est brisé en un point par la force du vent : son extrémité vient rencontrer la terre à 16 coudées de son pied. À combien de coudées du pied a-t-il été brisé ?

☞ **Correction exercice 39 :** Soit x la hauteur en coudées où le pied a été brisé. Alors :

$$\begin{aligned} & (32-x)^2 = x^2 + 16^2 \\ \iff & 1024 - 64x = 256 \\ \iff & 64x = 768 \\ \iff & x = 12. \end{aligned}$$

La bambou a été brisé à 12 coudées du pied.

♦ **EQU.40** (**Lunules d'Hippocrate, 450 av JC**) ABC est un triangle rectangle en A et on construit les demi-disques de diamètres $[AB]$, $[AC]$ et $[BC]$ comme sur la figure ci-dessous.



Démontrer que l'aire des lunules (parties en orange) est égale à l'aire du triangle ABC.

☞ **Correction exercice 40 :** Simple application du théorème de Pythagore : faites un bon dessin, ou un bon calcul !

♦ **EQU.41** (**Leonard de Pise, 1202**) Deux tours élevées l'une de 30 pas, l'autre de 40, sont distantes de 50 pas ; entre les deux se trouve une fontaine vers le centre de laquelle deux oiseaux descendant des sommets des deux tours se dirigent du même vol et parviennent dans le même temps ; quelles sont les distances horizontales du centre de la fontaine aux deux tours ?

☞ **Correction exercice 41 :** Soit x la distance entre la petite tour et la fontaine. Alors :

$$\begin{aligned} & (50-x)^2 + 40^2 = x^2 + 30^2 \\ \iff & -100x + 4100 = 900 \\ \iff & x = 32. \end{aligned}$$

La fontaine est donc à 32 pas de la petite tour et à 18 pas de la grande.