Chapitre 4

Analyse réelle

Je me détourne avec effroi et horreur de cette plaie lamentable des fonctions continues qui n'ont point de dérivées.

Charles Hermite (1822-1901).

Dans tout le chapitre, I désigne un intervalle non réduit à un point.

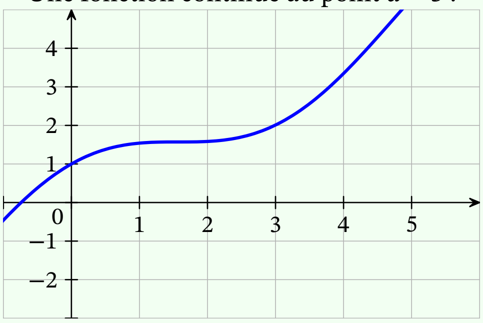
I Continuité

4.1.1 Définition

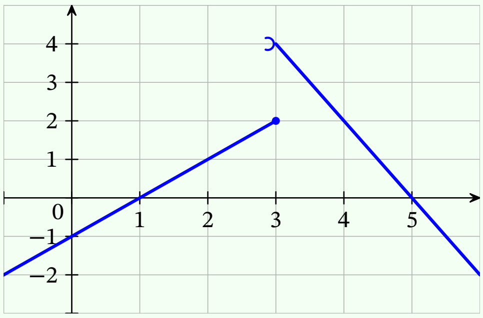
Définition 1 (Continuité en un point) — Soit f une fonction définie sur I et $a \in I$.
On dit que f est **continue en** a si f admet une limite en a (qui est alors nécessairement $f(a)$).

☞ **Exemple 1**

Une fonction continue au point $a = 3$:



Une fonction discontinue en $a = 3$:



Définition 2 (Continuité sur un intervalle) — On dit qu'une fonction f est **continue sur** I si elle continue en tout point de I.

4.1.2 Opérations et fonctions continues

Proposition 4.1 (admis) — *Si f et g sont deux fonctions continues en un point a, alors :*

- *$f + g$ est continue en a ;*
- *fg est continue en a ;*
- *si g ne s'annule pas en a, alors $\frac{f}{g}$ est continue en a ;*
- *si g est continue en a et que f est continue en $g(a)$, alors $f \circ g$ est continue en a.*

Proposition 4.2 (admis) — *Les fonctions polynômiales, valeur absolue, racine carrée, exponentielle sont continues sur leur intervalle de définition.*

☞ **Exemple 2** Justifier soigneusement que la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f : x \mapsto \dfrac{e^{1+x}}{\sqrt{1+x^2}}$ est continue sur $\mathbf{R}$.

Théorème 4.3 (Une condition suffisante de continuité) — *Toute fonction dérivable en a est continue en a.*

Attention, la réciproque est fausse. La fonction valeur absolue est continue en zéro mais pas dérivable en zéro. Il existe des fonctions continues sur $\mathbf{R}$ mais dérivable en aucun point (les « monstres » de Weierstrass).

4.1.3 Lien avec les suites

Proposition 4.4 ($\lim f(u_n)$) — *Si (u_n) est une suite à valeurs dans I convergeant vers ℓ, et si f est une fonction continue en ℓ, alors $(f(u_n))$ converge vers $f(\ell)$. Autrement dit :*

$$\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\ell).$$

☞ **Exemple 3** Si (u_n) est définie par $u_n = 1 - \frac{1}{n}$, et $f(x) = \frac{5-x}{1+x^2}$, quelle est la limite de $(f(u_n))$?

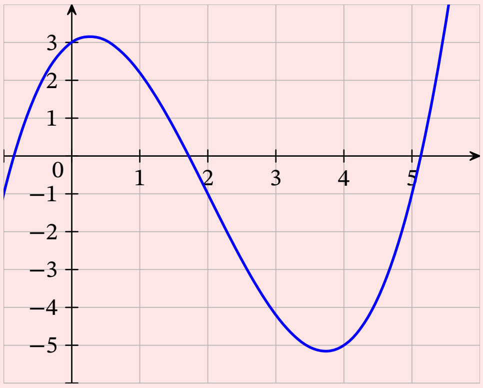
Proposition 4.5 — *Soient (u_n) une suite définie par $u_0 \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est une fonction continue en ℓ. Alors si (u_n) converge vers ℓ, alors $f(\ell) = \ell$.*

Application : Déterminer la limite de la suite u telle que : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = -\frac{1}{4}u_n(u_n-5) \quad \text{pour tout entier naturel } n. \end{cases}$

4.1.4 Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 4.6 (des valeurs intermédiaires, TVI) —

*Si f est **continue** sur $[a,b]$, alors tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$ admet au moins un antécédent dans $[a,b]$ par f.*
Autrement dit, l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution dans $[a,b]$.
Dans l'exemple ci-contre, on a $f(0) = 3$ et $f(5) = -1$, et f est continue donc toute équation du type $f(x) = k$ où $k \in [-1;3]$ admet au moins une solution.



Proposition 4.7 (Unicité de la solution) — *Si f est **strictement monotone et continue** sur $[a,b]$, alors tout nombre nombre k compris entre $f(a)$ et $f(b)$ admet un **unique** antécédent.*

II Dérivabilité

4.2.1 Lien entre la dérivation et les variations

Définition 3 (Rappel) — Soit f définie sur I. On suppose qu'en un point a de I :

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \ell$$

On dit alors que f **est dérivable en** a et que **le nombre dérivé de** f **en** a **est égal à** ℓ.
On note $f'(a) = \ell$.

Le théorème suivant est bien connu mais non démontré pour l'instant, et nous sert à comprendre le lien entre dérivation et variations :

Théorème 4.8 (Inégalités larges, admis) — *Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Alors :*
- *Si pour tout x appartenant à I, $f'(x) \geqslant 0$, alors f est **croissante** sur I.*
- *Si pour tout x appartenant à I, $f'(x) \leqslant 0$, alors f est **décroissante** sur I.*
- *Si pour tout x appartenant à I, $f'(x) = 0$, alors f est **constante** sur I.*

Théorème 4.9 (Inégalités strictes, admis) — *On peut remplacer les inégalités larges par des inégalités strictes dans le théorème précédent et dans ce cas :*

- *Si pour tout x appartenant à I, $f'(x) > 0$ sur I sauf éventuellement en un nombre fini de points, alors f est strictement croissante sur I;*
- *si pour tout x appartenant à I, $f'(x) < 0$ sur I sauf éventuellement en un nombre fini de points, alors f est strictement décroissante sur I.*

4.2.2 Composée de fonctions

Définition 4 (Composée) — Soit $u : I \to J$ et v définie sur J. Alors on définie la **composée** de u par v, notée $v \circ u$, par :

$$v \circ u(x) = v(u(x))$$

Proposition 4.10 (Dérivée d'une composée) — *Si u est dérivable sur I et v est dérivable sur J, alors $v \circ u$ est dérivable sur I et :*

$$(v \circ u)' = u' \times (v' \circ u).$$

On retrouve à partir de cette formule, toutes les formules de dérivation que vous connaissez bien évidemment par cœur :

- $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$
- $(u^n)' = nu'u^{n-1}$
- $\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
- $(\mathrm{e}^u)' = u'\mathrm{e}^u$

4.2.3 Dérivée seconde

Définition 5 — Soit f est une fonction définie sur I. Si f est dérivable sur I et que f' est dérivable sur I, on dit que f est deux fois dérivable sur I et on note $f'' = (f')'$.
De même, si $n \in \mathbf{N}$, on note $f^{(n)}$ la dérivée n-ième de f.

☞ **Exemple 4** Calculer les dérivées n-ième de la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f : x \mapsto x^3 + 3x^2 - x + 1$.

III Convexité

4.3.1 Notion de convexité

Définition 6 (Fonction convexe) —

Si f est définie sur I, on dit que f est **convexe** sur I si la courbe de f est **en-dessous de chacune de ses sécantes**.

Définition 7 (Fonction concave) — Si la courbe de f est **au-dessus** de chacune de ses sécantes, on dit que f est **concave** sur I.

Proposition 4.11 (Fonction concave) — *Une fonction f est* ***concave*** *sur I si et seulement si $-f$ est* ***convexe*** *sur I.*

Théorème 4.12 (Cas f deux fois dérivable, admis en parti) — *Soit f une fonction deux fois dérivable sur I. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

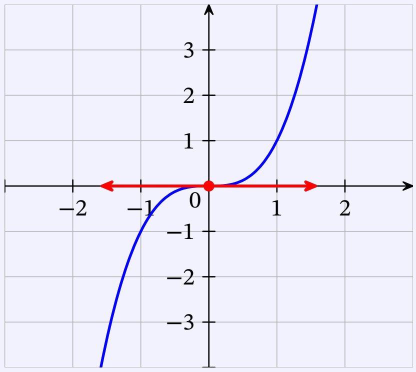
- *f est convexe sur I;*
- *la courbe de f est au-dessus de ses tangentes;*
- *f' est croissante sur I;*
- *f'' est positive sur I.*

☞ **Exemple 5** Démontrer pour que pour tout réel x, $e^x \geqslant 1+x$, puis démontrer que $e^{3x} \geqslant 3e^3x - 2e^3$.
Démontrer que pour tout $x \geqslant 0$, $\sin(x) \leqslant x$.
Démontrer que pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin(x) \geqslant \frac{2x}{\pi}$.

4.3.2 Point d'inflexion

Définition 8 (Point d'inflexion) —

Si f est définie et deux fois dérivable sur I, un **point d'inflexion** de f est un point où f **change de convexité**.



Proposition 4.13 — *Si f est définie et deux fois dérivable sur I, alors f admet un point d'inflexion en $a \in I$ si et seulement si f'' s'annule et change de signe en a.*

IV Exercices

♦ **CC.1** Justifier que la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f: x \mapsto \dfrac{e^x\sqrt{x}}{x^2+1}$ est continue.

♦ **CC.2** On considère la fonction définie par :

$$f: x \mapsto \begin{cases} (x+1)e^x & \text{si } x<0 \\ 1 & \text{si } x=0 \\ \sqrt{x}(x+1)+1 & \text{si } x>0. \end{cases}$$

f est-elle continue sur $\mathbf{R}$?

♦ **CC.3**

1) Démontrer que l'équation $2(x-1)e^{x-1}=x^2$ admet une unique solution α sur $\mathbf{R}$.

2) Montrer que $\alpha \in]1,7;1,8[$.

♦ **CC.4 (Degré impair)** Soit $n \in \mathbf{N}$. On considère une fonction polynomiale de degré $2n+1$:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{2n+1}x^{2n+1}.$$

Démontrer que f admet au moins une racine réelle.

♦ **CC.5** Soit f la fonction définie sur $[-6;+\infty[$ par :

$$f(x) = \sqrt{6+x}.$$

Soit (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{pour tout entier } n \in \mathbf{N}. \end{cases}$$

1) Montrer par récurrence que (u_n) est une suite croissante et majorée par 3.

2) Que peut-on en déduire sur (u_n) ?

3) Déterminer la limite de (u_n).

♦ **CC.6**

1) Démontrer que l'équation $x^3 = -x-5$ admet une solution α sur $\mathbf{R}$.

2) Justifier que $\alpha \in [-2;-1]$.

3) Écrire un algorithme permettant de déterminer un encadrement de α à 10^{-n} près, où n est un entier choisi par l'utilisateur.

♦ **CC.7** Soit f la fonction définie sur $[-6;+\infty[$ par :

$$f(x) = \sqrt{x^2-x+1}.$$

Soit (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{pour tout entier } n \in \mathbf{N}. \end{cases}$$

1) Étudier les variations de f et résoudre l'équation $f(x)=x$.

2) Montrer par récurrence que (u_n) est une suite minorée par 1 et décroissante.

3) En déduire la limite de (u_n).

♦ **CC.8** Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par :

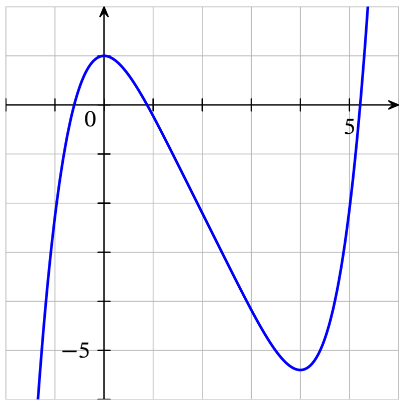
$$f(x) = 1 - x^2e^{1-x^2}.$$

1) Déterminer le sens de variation de f.

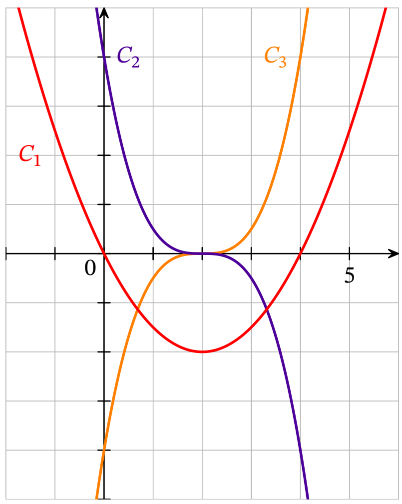
2) Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 2$, l'équation $f(x) = \dfrac{1}{n}$ admet deux solutions, notées u_n pour la plus petite et w_n pour la plus grande.

3) Étudier les sens de variations des suites (u_n) et (w_n).
Indication : Faire un dessin de la courbe de f et placer u_n et u_{n+1} pour comprendre.

♦ **CC.9** Voici la courbe d'une fonction f deux fois dérivable sur $\mathbf{R}$:



Parmi les trois courbes suivantes, déterminer celle qui représente la fonction dérivée seconde f'' de f :



♦ **CC.10** Soit f définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + 5x^2 - 4.$$

1) Calculer l'expression de la dérivée seconde de f.

2) Donner le tableau de signe de $f''(x)$.

3) En déduire la convexité de f et l'abscisse des éventuels points d'inflexion.

♦ **CC.11** Démontrer que pour tout $x \in [0;+\infty[$:

$$\sqrt{x} \leqslant \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}.$$

♦ **CC.12** Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur l'intervalle $[-6;5]$ dont on connaît le tableau de variations de la fonction dérivée f'.

x	-6	-2	1	2	5
Variations de f'	14 ↘	0 ↗	2 ↘	0 ↘	-2

Déterminer la convexité de f.

♦ **CC.13** Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur l'intervalle $[-8;8]$ dont on connaît le tableau de variations de la fonction dérivée seconde f''.

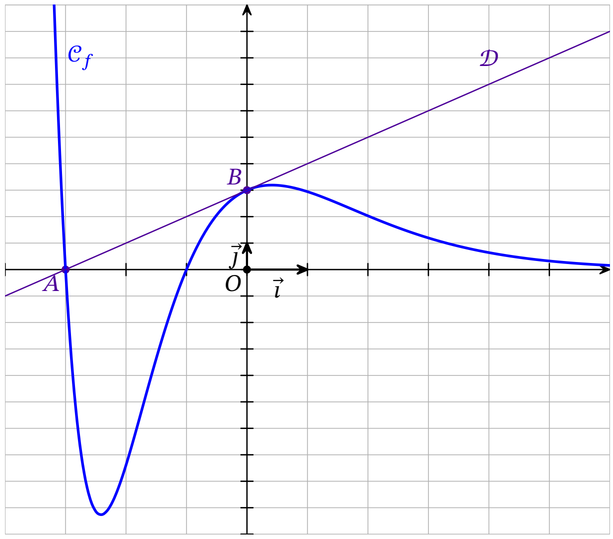
x	-8	-2	1	4	8
Variations de f''	-2 ↗	0 ↘	-3 ↗	0 ↗	1

Déterminer la convexité de f.

♦ **CC.14** On considère la fonction f définie et dérivable sur $\mathbf{R}$ par

$$f(x) = (ax^2 + bx + c)\mathrm{e}^{-x}$$

où a, b et c désignent trois réels.
Sur le graphique ci-dessous, on a représenté la courbe de f dans le plan muni du repère orthogonal $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. La droite $\mathcal{D}$ est la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point B, et les points A et B ont des coordonnées entières et appartiennent aux deux courbes.



Partie A

1) Déterminer $f(0)$ et $f(-3)$ graphiquement.

2) Déterminer une équation de la tangente $\mathcal{D}$.

3) En déduire la valeur de $f'(0)$.

4) Calculer l'expression $f'(x)$ en fonction de a, b et c.

5) En utilisant les questions précédentes, montrer que les réels a, b et c sont solutions du système :

$$\begin{cases} 9a - 3b + c = 0 \\ b - c = 1 \\ c = 3 \end{cases}$$

6) En déduire les valeurs a, b et c.

Partie B

On suppose dans cette partie que f est définie par :

$$f(x) = (x^2 + 4x + 3)\mathrm{e}^{-x}.$$

1) Calculer $f'(x)$ pour tout réel x.

2) Donner le tableau de variations complet de f.

3) Étudier la convexité de f.

BAC

♦ **CC.15** (**Sujet 1 EDS 2020**) Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{x}.$$

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé.

1) a) Préciser la limite de la fonction f en $+\infty$.

b) Justifier que l'axe des ordonnées est asymptote à la courbe $\mathcal{C}_f$.

2) Montrer que, pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0;+\infty[$, on a :

$$f'(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$$

où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.

3) Déterminer les variations de la fonction f sur l'intervalle $]0;+\infty[$. on établira un tableau de variations de la fonction f dans lequel apparaîtront les limites.

4) Soit m un nombre réel. Préciser, en fonction des valeurs du nombre réel m, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$.

5) On note Δ la droite d'équation $y = -x$.
On note A un éventuel point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse a en lequel la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ est parallèle à la droite Δ.

a) Montrer que a est solution de l'équation $e^x(x-1)+x^2 = 0$.
On note g la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $g(x) = e^x(x-1)+x^2$.
On admet que g est dérivable et on note g' sa fonction dérivée.

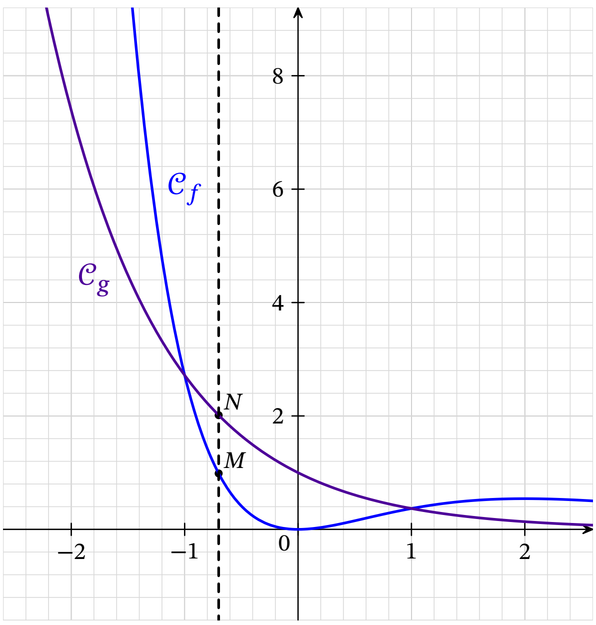
b) Calculer $g'(x)$ pour tout réel x de l'intervalle $[0;+\infty[$ puis dresser le tableau de variations de g sur $[0;+\infty[$.

c) Montrer qu'il existe un unique point A en lequel la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ est parallèle à la droite Δ.

♦ CC.16 (Sujet 2 EDS 2020)

Le graphique ci-dessous représente, dans un repère orthogonal, les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ des fonctions f et g définies sur **R** par :

$$f(x) = x^2e^{-x} \quad \text{et} \quad g(x) = e^{-x}.$$



1) a) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

b) Étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

2) Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[-1;1]$, on considère M de coordonnées $(x,f(x))$ et N de coordonnées $(x,g(x))$, et on note $d(x)$ la distance MN. On admet que $d(x) = e^{-x} - x^2e^{-x}$.
On admet que la fonction d est dérivable sur $[-1;1]$ et on note d' sa fonction dérivée.

a) Montrer que $d'(x) = e^{-x}(x^2-2x-1)$.

b) En déduire les variations de la fonction d sur l'intervalle $[-1,1]$.

c) Déterminer l'abscisse commune x_0 des points M_0 et N_0 permettant d'obtenir la distance $d(x_0)$ maximale, et donner une valeur approchée à 0,1 près de la distance M_0N_0.

3) Soit Δ la droite d'équation $y = x+2$.
On considère la fonction h dérivable sur **R** et définie par $h(x) = e^{-x} - x - 2$.
En étudiant le nombre de solutions de l'équation $h(x) = 0$, déterminer le nombre de points d'intersection de la droite Δ et de la courbe $\mathcal{C}_g$.

4) Étudier la convexité éventuelle de f.

♦ CC.17 (11 Mai 2022, Métropole)

Dans le cadre d'un essai clinique on envisage deux protocoles de traitement d'une maladie.

L'objectif de cet exercice est d'étudier, pour ces deux protocoles, l'évolution de la quantité de médicament présente dans le sang d'un patient en fonction du temps.

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A

Le premier protocole consiste à faire absorber un médicament, sous forme de comprimé, au patient.

On modélise la quantité de médicament présente dans le sang du patient, exprimée en mg, par la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 10]$ par

$$f(t) = 3te^{-0,5t+1},$$

où t désigne le temps, exprimé en heure, écoulé depuis la prise du comprimé.

1) a) On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0; 10]$ et on note f' sa fonction dérivée.
Montrer que, pour tout nombre réel t de $[0; 10]$, on a : $f'(t) = 3(-0,5t+1)e^{-0,5t+1}$.

b) En déduire le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0; 10]$.

c) Selon cette modélisation, au bout de combien de temps la quantité de médicament présente dans le sang du patient sera-t-elle maximale ?
Quelle est alors cette quantité maximale ?

2) a) Montrer que l'équation $f(t) = 5$ admet une unique solution sur l'intervalle $[0; 2]$ notée α, dont on donnera une valeur approchée à 10^{-2} près.

On admet que l'équation $f(t) = 5$ admet une unique solution sur l'intervalle $[2; 10]$, notée β, et qu'une valeur approchée de β à 10^{-2} près est 3,46.

b) On considère que ce traitement est efficace lorsque la quantité de médicament présente dans le sang du patient est supérieure ou égale à 5 mg.

Déterminer, à la minute près, la durée d'efficacité du médicament dans le cas de ce protocole.

Partie B

Le deuxième protocole consiste à injecter initialement au patient, par piqûre intraveineuse, une dose de 2 mg de médicament puis à réinjecter toutes les heures une dose de 1,8 mg.

On suppose que le médicament se diffuse instantanément dans le sang et qu'il est ensuite progressivement éliminé.

On estime que lorsqu'une heure s'est écoulée après une injection, la quantité de médicament dans le sang a diminué de 30 % par rapport à la quantité présente immédiatement après cette injection.

On modélise cette situation à l'aide de la suite (u_n) où, pour tout entier naturel n, u_n désigne la quantité de médicament, exprimée en mg, présente dans le sang du patient immédiatement après l'injection de la n-ième heure. On a donc $u_0 = 2$.

1) Calculer, selon cette modélisation, la quantité u_1, de médicament (en mg) présente dans le sang du patient immédiatement après l'injection de la première heure.

2) Justifier que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = 0{,}7u_n + 1{,}8$.

3) a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \leqslant u_{n+1} < 6$.

b) En déduire que la suite (u_n) est convergente. On note ℓ sa limite.

c) Déterminer la valeur de ℓ. Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

4) On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = 6 - u_n$.

a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,7 dont on précisera le premier terme.

b) Déterminer l'expression de v_n en fonction de n, puis de u_n en fonction de n.

Pour l'instant, on ne peut pas traiter la question suivante autrement qu'avec la calculatrice. Wait and see pour la résolution propre.

c) Avec ce protocole, on arrête les injections lorsque la quantité de médicament présente dans le sang du patient est supérieure ou égale à 5,5 mg.

Déterminer, en détaillant les calculs, le nombre d'injections réalisées en appliquant ce protocole.

♦ **CC.18 (Centres étrangers, 22 mars 2023)**

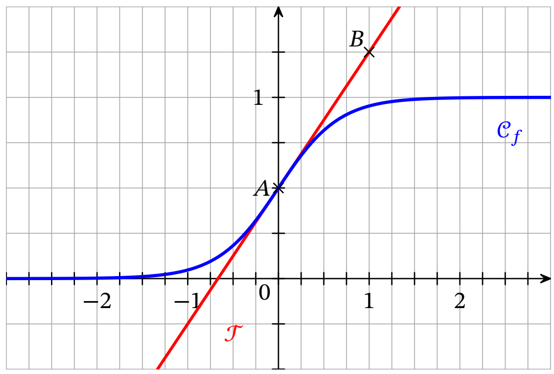
On considère la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-3x}}.$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.

On nomme A le point de coordonnées $\left(0\,;\,\frac{1}{2}\right)$ et B le point de coordonnées $\left(1\,;\,\frac{5}{4}\right)$.

On a tracé ci-dessous la courbe $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{T}$ la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.



Partie A - Lectures graphiques

Dans cette partie, les résultats seront obtenus par lecture graphique. Aucune justification n'est demandée.

1) Déterminer l'équation réduite de la tangente $\mathcal{T}$.

2) Donner les intervalles sur lesquels la fonction f semble convexe ou concave.

Partie B - Étude de la fonction

1) On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbf{R}$.
Déterminer l'expression de sa fonction dérivée f'.

2) Justifier que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbf{R}$.

3) a) Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction f.

b) Déterminer la limite en $-\infty$ de la fonction [.

Wait and see pour la question suivante !

4) Déterminer la valeur exacte de la solution α de l'équation $f(x) = 0{,}99$.

Partie C - Tangente et convexité

1) Déterminer par le calcul une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.

On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbf{R}$.

On note f'' la fonction dérivée seconde de la fonction f.

On admet que f'' est définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$f''(x) = \frac{9\mathrm{e}^{-3x}\left(\mathrm{e}^{-3x}-1\right)}{\left(1+\mathrm{e}^{-3x}\right)^3}.$$

2) Étudier le signe de la fonction f'' sur $\mathbf{R}$.

3) a) Indiquer, en justifiant, sur quel(s) intervalle(s) la fonction f est convexe.

b) Que représente le point A pour la courbe $\mathcal{C}_f$?

c) En déduire la position relative de la tangente $\mathcal{T}$ et de la courbe $\mathcal{C}_f$.
Justifier la réponse.

Autres

♦ **CC.19** (**Prolongement en** -1) On considère la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3+1}{x+1} & \text{si } x\neq -1\\ 3 & \text{si } x=-1.\end{cases}$$

1) Justifier que f est continue sur $]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$.

2) a) Montrer que pour tout réel x :

$$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1).$$

b) En déduire que f est continue en -1.

3) Montrer que pour tout réel h différent de 0 :

$$f(-1+h)=\frac{(3h-3h^2+h^3}{h}.$$

4) En déduire que $\dfrac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$ admet une limite quand h tend vers 0, que l'on déterminera.

5) f est-elle dérivable en -1 ?

♦ **CC.20** Soit a, b, d et d quatre réels où $a\neq 0$.
Montrer que la courbe de f où pour tout réel x,
$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, admet un point d'inflexion.

♦ **CC.21** Soit m un réel et f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par

$$f(x)=\left(x^2+(m-1)x+3m-1\right)\mathrm{e}^{-x}.$$

Déterminer les valeurs du réel m tel que f est convexe sur $\mathbf{R}$.