

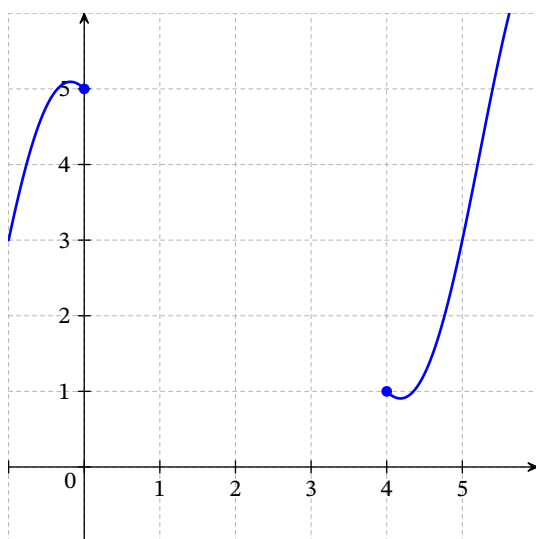
Fiche 14 | Théorème des Valeurs Intermédiaires

1 Contexte

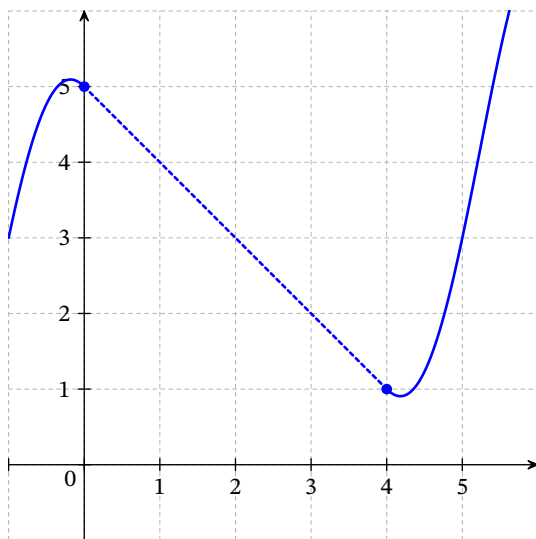
Théorème 14.1 (T.V.I) — Si f est **continue** sur $[a,b]$, alors tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$ admet au moins un antécédent dans $[a,b]$ par f .
Autrement dit, l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution dans $[a,b]$.

Mais késkeçaveudire?

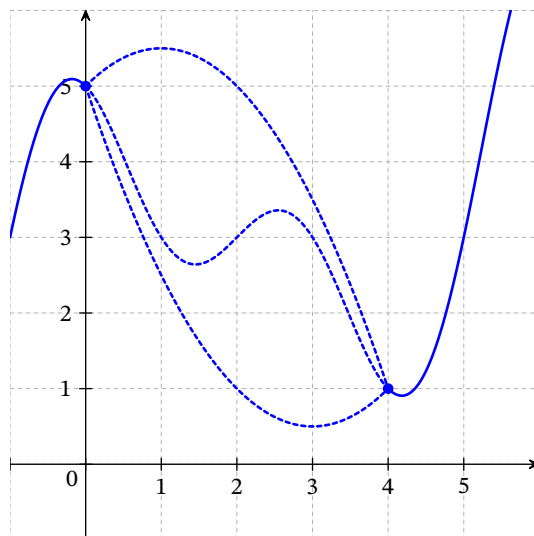
L'idée est qu'une fonction continue sur un intervalle doit passer par toutes les valeurs intermédiaires entre deux images. Par exemple, voici une fonction f (courbe en bleu) :



Sa courbe, pour passer du point $(0,5)$ au point $(4,1)$, doit forcément "traverser" l'intervalle $[1;5]$, **parce que f est continue**, par exemple comme ceci :



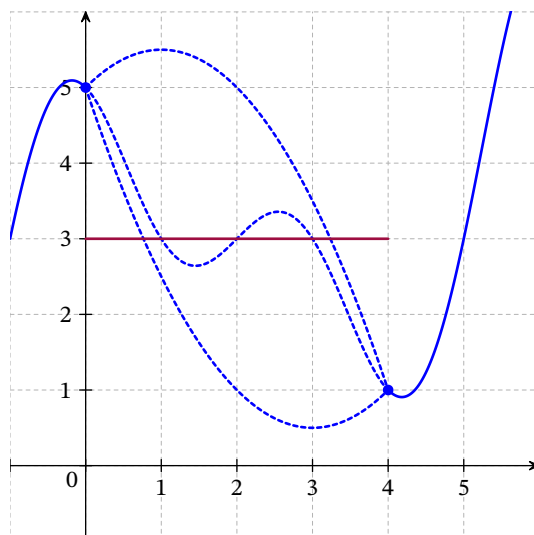
Mais on peut imaginer bien d'autres manières de faire :



Le TVI permet d'affirmer que par exemple, l'équation

$$f(x) = 3$$

admet au moins une solution (mais potentiellement, plus d'une!) pour x dans l'intervalle $[0;4]$, comme on peut le constater graphiquement dans nos exemples :



Remarque cruciale 1 L'équation $f(x) = k$ n'admet qu'une solution si f est strictement croissante, ou strictement décroissante, sur l'intervalle $[a,b]$. Cela est souvent utilisé en pratique pour justifier de l'unicité de la solution à l'équation $f(x) = k$!

2 Un exemple

Méthode 14.1

Comment appliquer le TVI ?

Exemple 1 (Démontrer que l'équation $x^3 - 3x - 2 = 0$ admet une unique solution α sur $[1, 3]$.)

On pose $g(x) = x^3 - 3x - 2$.

g est polynomiale donc dérivable sur $\mathbf{R}$ et pour tout réel x :

$$g'(x) = 3x^2 - 3$$

On a donc $g'(x) = 3(x-1)(x+1)$ d'où :

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
Signe de $g'(x)$	+	0	-	0	+
Variations de g					

Les limites sont obtenues comme d'habitude en $\pm\infty$ pour une expression polynomiale, en factorisant ici par x^3 . Voici maintenant les trois points cruciaux à vérifier pour appliquer le T.V.I :

- g est polynomiale donc continue sur $\mathbf{R}$, en particulier sur $[1, 3]$;
- $g(1) = -5 < 0$;
- $g(3) = 15 > 0$.

On peut conclure d'après le T.V.I que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution sur l'intervalle $[1, 3]$. Comme de plus g est strictement croissante sur $[1, 3]$, la solution est unique.

Méthode 14.2

Comment encadrer la solution α ?

Exemple 2 (Montrer que $2,103 < \alpha < 2,104$.) Ici, c'est la stricte croissance de g qui est cruciale : on calcule donc :

- $g(2,103) = -0,008253273$
- $g(2,104) = 0,002020864$

Donc $2,103 < \alpha < 2,104$.

Remarque 2 Remarquez que dans le calcul de $g(2,103)$ et $g(2,104)$, on a besoin des valeurs exactes, mais le jour du bac, si vous donnez des valeurs approchées ou précisez juste la position des valeurs par rapport à l'image recherchée, ça devrait aller...

Remarque 3 Remarquez que la valeur α est définie implicitement par le fait que $g(\alpha) = 0$. On a donc

$$\alpha^3 - 3\alpha - 2 = 0.$$

Parfois, certaines questions nécessitent d'écrire cette égalité pour en montrer une autre où α intervient.