

Chapitre 4 | Résolutions graphiques

On fait la science avec des faits, comme on fait une maison avec des pierres : mais une accumulation de faits n'est pas plus une science qu'un tas de pierres n'est une maison.

Henri Poincaré (1854-1912).

I Résolution graphique d'équations

4.1.1 Équation du type $f(x) = k$

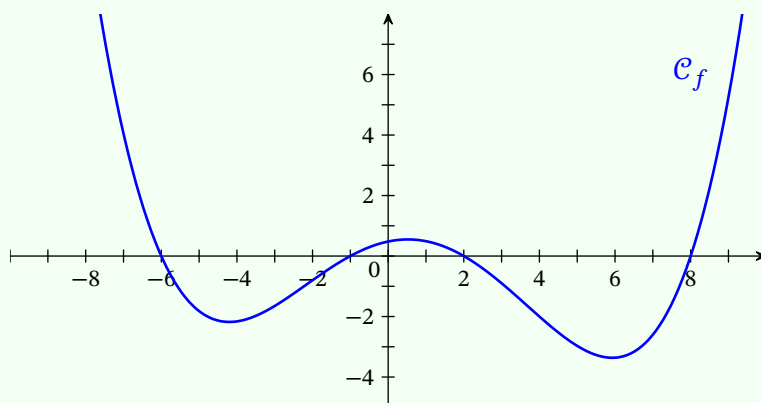
Proposition 4.1 (Résolution graphique de l'équation $f(x) = k$) — Si k est un réel et f une fonction, résoudre graphiquement une équation du type $f(x) = k$, c'est **trouver tous les antécédents de k par la fonction f , visuellement via la courbe de f .**

Exemple 1 Considérons la fonction définie par la courbe ci-dessous et résolvons graphiquement l'équation $f(x) = 3$.

Pour cela :

- on commence par tracer la droite horizontale d'ordonnée 3 ;
- on étudie les points d'intersection de cette droite avec la courbe de f ;
- on lit graphiquement les abscisses des points obtenus : ce sont les solutions de l'équation $f(x) = 3$.

Ici, graphiquement, on obtient deux solutions : leurs valeurs sont environ $-6,9$ et environ $8,8$.



4.1.2 Équation du type $f(x) = g(x)$

Proposition 4.2 (Résolution graphique de l'équation $f(x) = g(x)$) — Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$, c'est déterminer les abscisses des points d'intersection des courbes de f et g .

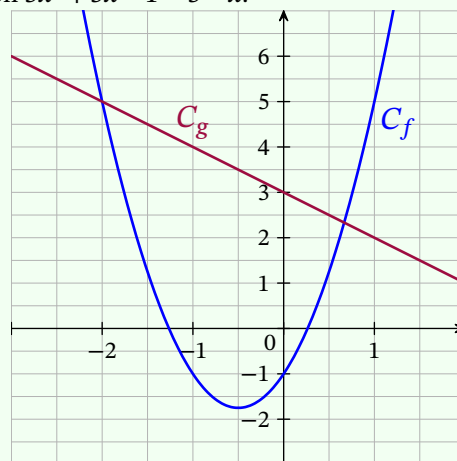
Exemple 2 On cherche à résoudre graphiquement l'équation $3x^2 + 3x - 1 = 3 - x$.

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbf{R}$ par :

- $f(x) = 3x^2 + 3x - 1$
- $g(x) = 3 - x$

Et leurs courbes dans le repère ci-contre.

On obtient deux points d'intersection, leurs abscisses nous donnent les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$, ici environ -2 et environ $0,7$.



Remarque 1 Seule une résolution algébrique de l'équation nous permettrait de prouver qu'il y a bien deux solutions à cette équation, et de déterminer leurs valeurs exactes.

II Résolution graphique d'inéquations

4.2.1 Inéquation du type $f(x) < k$

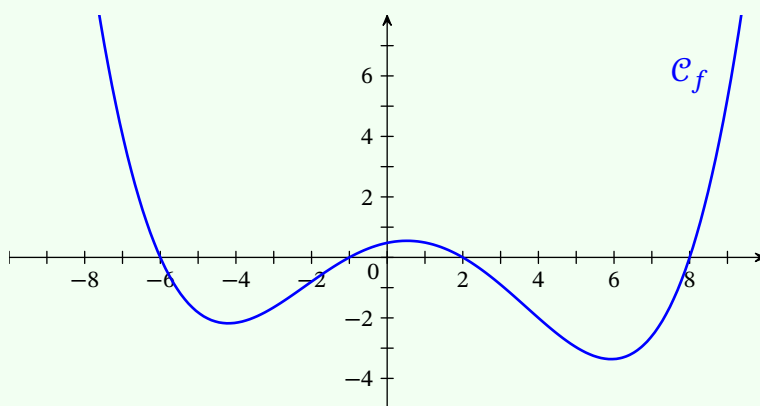
Proposition 4.3 (Résolution graphique de l'inéquation $f(x) < k$) — Résoudre graphiquement une équation du type $f(x) < k$, c'est **trouver tous les nombres x dont l'image par f est strictement inférieure à k** . Visuellement, cela revient à trouver toutes les abscisses des points pour lesquels la courbe de f est strictement en-dessous de la droite horizontale d'ordonnée k .

Exemple 3 On reprend la fonction de l'exemple précédent et on cherche à résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) < 3$.

Pour cela :

- on commence par tracer la droite horizontale d'ordonnée 3 ;
- on lit graphiquement les abscisses des points où **la courbe est strictement en-dessous de la droite** : ce sont les solutions de l'inéquation $f(x) < 3$.

Ici, graphiquement, on obtient un intervalle ouvert solution : $] -6,9; 8,8[$.



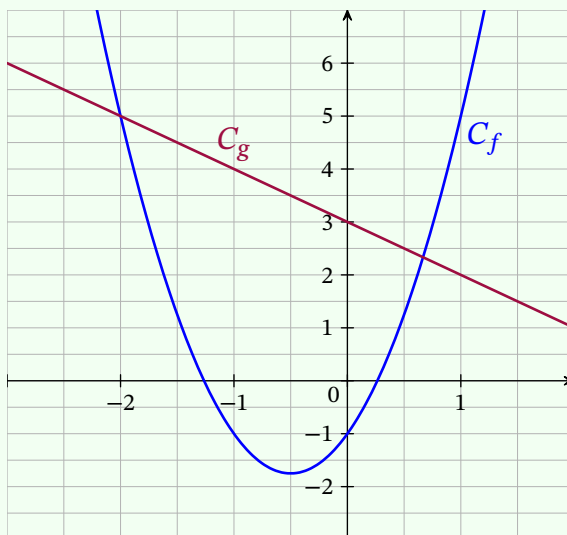
4.2.2 Inéquation du type $f(x) < g(x)$

Proposition 4.4 (Résolution graphique de l'équation $f(x) < g(x)$) — Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) < g(x)$, c'est déterminer les abscisses des points pour lesquels la courbe de f est strictement en-dessous de celle de g .

Exemple 4 (Inéquation $3x^2 + 3x - 1 < 3 - x$)

Comme précédemment, on considère les fonctions f et g définies sur $\mathbf{R}$ par :

- $f(x) = 3x^2 + 3x - 1$
- $g(x) = 3 - x$



On obtient un intervalle ouvert : environ $] -2; 0,7[$.

Remarque 2 Encore une fois, la résolution graphique ne permet que de conjecturer les solutions.

III Exercices

Résolutions graphiques d'(in)équations

♦ **EG.1** On considère la fonction f donnée par la courbe de la figure 7.

- 1) Résoudre graphiquement les équations :
 $(E_1) : f(x) = 1$ et $(E_2) : f(x) = 0$.
- 2) Résoudre graphiquement les inéquations :
 $(I) : f(x) > 0$ et $(I') : f(x) \leq 0$.

♦ **EG.2** On considère la fonction f donnée par la courbe de la figure 15.

- 1) Résoudre graphiquement les équations :
 $(E_1) : f(x) = 4$ et $(E_2) : f(x) = 2$.
- 2) Quel est le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$?
- 3) Résoudre graphiquement les inéquations :
 $(I_1) : f(x) > 4$ et $(I_2) : f(x) \leq 2$.

♦ **EG.3** Les fonctions f et g sont données par les courbes de la figure 8.

- 1) Résoudre l'équation $(E) : f(x) = g(x)$.
- 2) Résoudre dans $]0; +\infty[$, $(I) : f(x) > g(x)$.

♦ **EG.4** Les fonctions f et g sont données par les courbes de la figure 14.

- 1) Résoudre l'équation $(E) : f(x) = g(x)$.
- 2) Résoudre dans $\mathbf{R}$ l'inéquation $f(x) \leq g(x)$.

Courbes pour les exercices

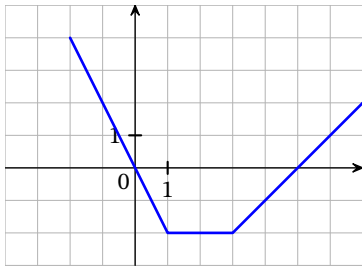


Figure 1

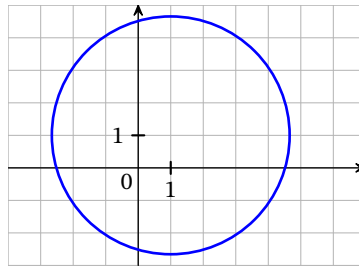


Figure 2

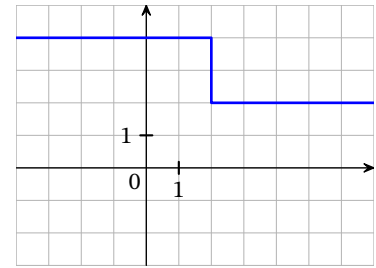


Figure 3

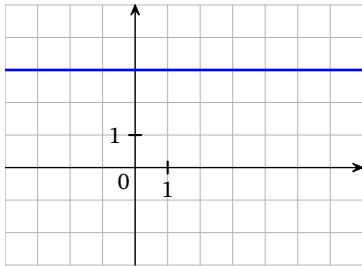


Figure 4

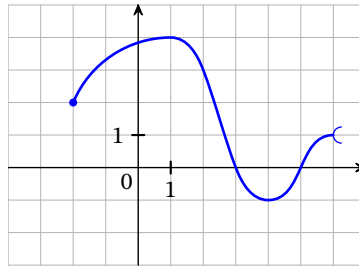


Figure 5

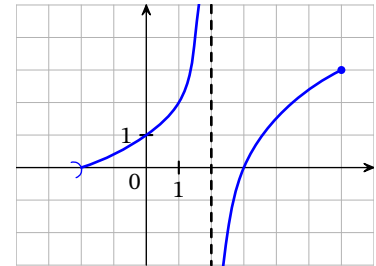


Figure 6

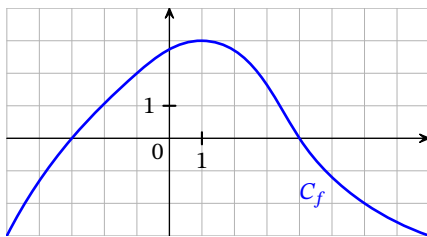


Figure 7

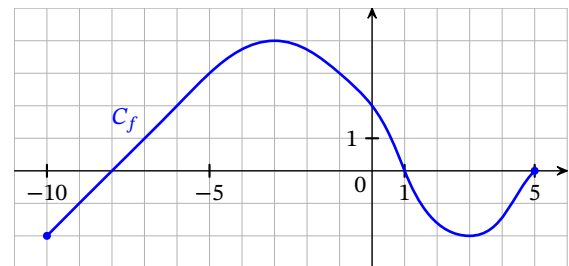


Figure 10

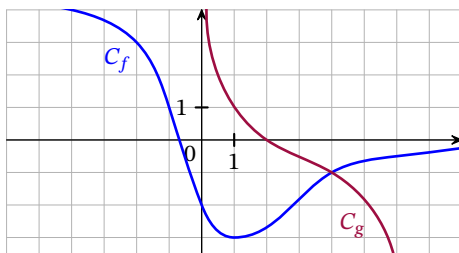


Figure 8

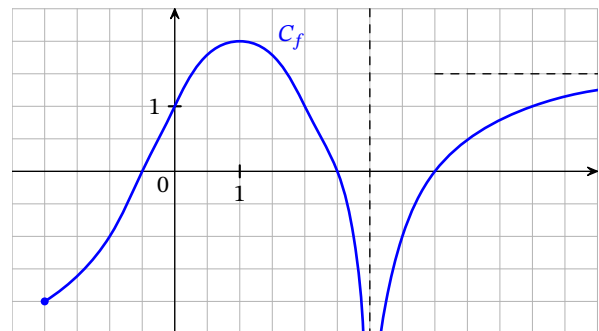


Figure 11

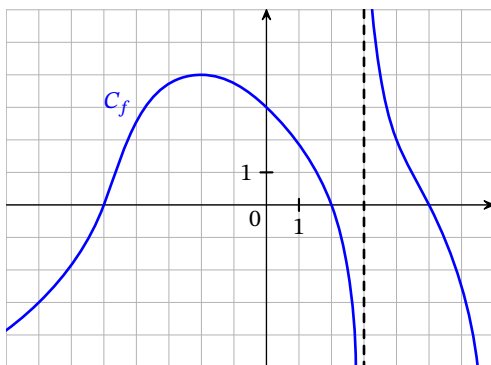


Figure 9

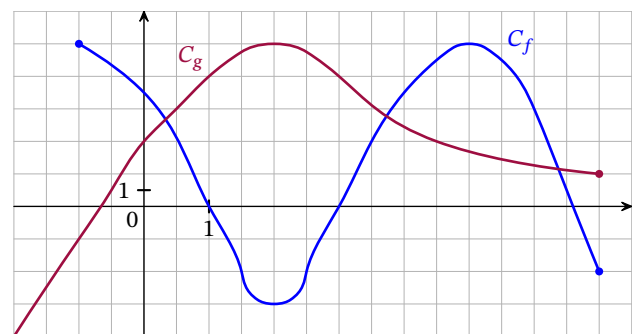


Figure 12

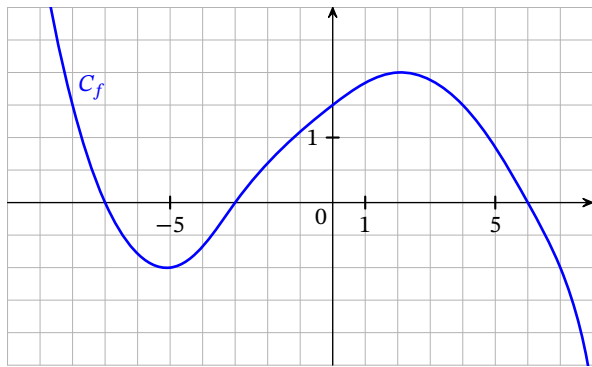


Figure 13

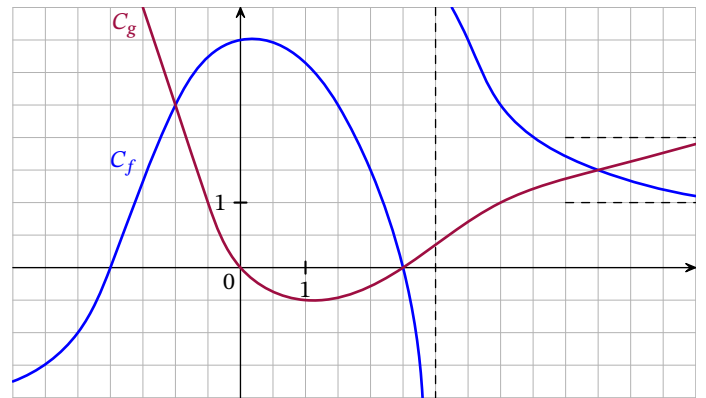


Figure 14

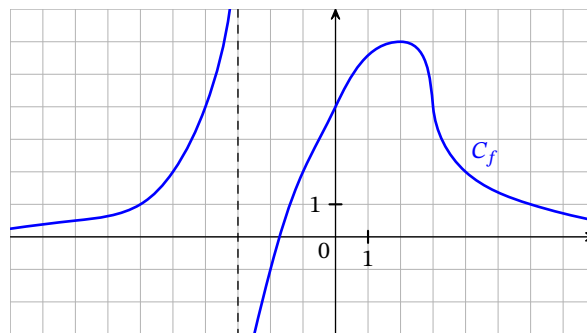


Figure 15