Chapitre 3 | Calcul matriciel

M. Gauss s'en est servi avec avantage dans ses Recherches analytiques pour découvrir les propriétés générales des formes du second degré, c'est-à-dire des polynômes du second degré à deux ou plusieurs variables, et il a désigné ces mêmes fonctions sous le nom de déterminants. Je conserverai cette dénomination qui fournit un moyen facile d'énoncer les résultats; j'observerai seulement qu'on donne aussi quelquefois aux fonctions dont il s'agit le nom de résultantes à deux ou à plusieurs lettres. Ainsi les deux expressions suivantes, déterminant et résultante, devront être regardées comme synonymes.

Augustin de Cauchy (1789-1857).

I Matrices

3.1.1 Matrices

Définition 1 (Matrice) — Une **matrice** de **taille** $n \times m$ est un **tableau de nombres** doté de n lignes et m colonnes. Les **coefficients** de ce tableau peuvent être indexés par un couple (i, j) qui représente la ligne (i) et la colonne (j) du coefficient :

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,m} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,m} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,m} \end{pmatrix}$$

Définition 2 — On dit que deux matrices sont égales si elles ont la même taille et les mêmes coefficients.

3.1.2 Vocabulaire

Définition 3 — Soit M une matrice de taille $n \times m$.

- Si $n = 1$, M est une matrice ligne;
- Si $m = 1$, M est une matrice colonne;
- Si $n = m$, M est une matrice carrée d'ordre n.

L'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbf{R}$ est noté $M_n(\mathbf{R})$.

II Somme et produit

3.2.1 Somme de matrices

Définition 4 (Somme de matrices) — Soit $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ deux matrices **de même taille** $n \times m$. On définit la matrice somme de A et B, notée $A + B$ par la matrice de taille $n \times m$ qui a pour coefficients $(a_{i,j} + b_{i,j})$.

☞ **Exemple 1** Si $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, calculer $A + B$.

3.2.2 Propriétés de l'addition pour les matrices

Définition 5 (Matrice nulle) — On appelle **matrice nulle** de taille $n\times m$ la matrice de taille $n\times m$ dont tous les coefficients sont nuls. On la note en général $O_{n,m}$.

$O_{2,3}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

Proposition 3.1 (Opposée d'une matrice) — *Pour toute matrice A de taille $n\times m$, il existe une unique matrice B de taille $n\times m$ telle que :*

$$A+B=B+A=O_{n,m}.$$

B est alors la matrice dont les coefficients sont les coefficients opposés de A : on note $B=-A$.

Proposition 3.2 — *Pour toutes matrices A, B et C de tailles $n\times m$:*

- $A+B=B+A$ *(commutativité);*
- $(A+B)+C=A+(B+C)$ *(associativité);*
- $A+O_{n,m}=O_{n,m}+A=A$ *($O_{n,m}$ est élément neutre).*

3.2.3 Produit par un réel

Définition 6 (Produit d'une matrice par un réel) — Si $k\in\mathbf{R}$ et que A est une matrice de taille $n\times m$ de coefficients $(a_{i,j})$, alors la matrice $k\cdot A$ est par définition la matrice de taille $n\times m$ de coefficients $(ka_{i,j})$. On la note aussi kA.

☞ **Exemple 2** Si $A=\begin{pmatrix}0&1&4\\1&2&0\end{pmatrix}$, calculer $3\cdot A$ (aussi notée $3A$).

Proposition 3.3 (Opposée d'une matrice) — *Si A est une matrice, alors l'opposée de A coïncide avec $(-1)\cdot A$: $-A=(-1)\cdot A$.*

Proposition 3.4 — *Pour toutes matrices A et B de même taille $n\times m$:*

- $k(A+B)=kA+kB$;
- $(k+k')A=kA+k'A$;
- $k(k'A)=(kk')A$;
- $1\cdot A=A$.

Proposition 3.5 (Résolution d'équations) — *Pour toutes matrices A, B et C de même taille $n\times m$ et tout réel k non nul :*

- $A+B=C \quad\Leftrightarrow\quad A=C-B$;
- $kA=B \quad\Leftrightarrow\quad A=\frac{1}{k}B$.

3.2.4 Produit de matrices

Définition 7 (Produit matriciel) — Soient $A=(a_{i,j})$ une matrice de taille $m\times n$ et $B=(b_{i,j})$ une matrice de taille $n\times p$. Alors on définit la matrice $A\times B=(c_{i,j})$, de taille $m\times p$, de la façon suivante :

$$\forall(i,j)\in[\![1;m]\!]\times[\![1;p]\!],\qquad c_{i,j}=\sum_{k=1}^{m}a_{i,k}b_{k,j}.$$

☞ **Exemple 3** Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, calculer $A \times B$ puis $B \times A$.

Remarques fondamentales : même si A et B sont carrées d'ordre n, **on n'a pas en général** $A \times B = B \times A$. Essayer avec $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

De plus, AB peut exister sans que BA n'existe.

Définition 8 (Commutativité) — Si A et B sont deux matrices telles que $AB = BA$, on dit que A et B **commutent**.

Proposition 3.6 (Propriétés du produit) — *Soit A, B et C trois matrices et k un réel. Sous l'hypothèse que les produits ont un sens, alors :*

- $A(BC) = (AB)C$ *(associativité du produit);*
- $(A+B)C = AC + BC$ *et* $A(B+C) = AB + AC$ *(distributivité du produit sur la somme);*
- $k(AB) = (kA)B = A(kB)$.

Proposition 3.7 — *Soit A, une matrice de taille $n \times m$, $p \in \mathbf{N}^*$ et $O_{m,p}$ la matrice nulle de taille $m \times p$. Alors :*

- $A \times O_{m,p} = O_{n,p}$;
- $O_{p,n} \times A = O_{p,m}$.

En particulier, si A est une matrice carrée d'ordre n, alors $A \times O_n = O_n \times A = O_n$.

Remarque fondamentale : un produit de matrices peut être nul sans que l'une des deux matrices soit nulle. Essayer avec : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.

III Inverse et puissance k-ième

3.3.1 Inversibilité

Définition 9 (Matrices diagonales) — Une matrice est carrée d'ordre n dite **diagonale** lorsque tous ses termes sont nuls à l'exception éventuelle des termes diagonaux $a_{1,1}$, ..., $a_{2,2}$, ..., $a_{n,n}$:

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{i,i} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Définition 10 (Matrice identité) — La **matrice identité** d'ordre n est la matrice diagonale d'ordre n n'ayant que des 1 sur sa diagonale : on la note I_n.

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Proposition 3.8 — *Pour toute matrice A carrée d'ordre n,*

$$A \times I_n = I_n \times A = A.$$

Définition 11 (Proposition-définition) — Si A est une matrice carrée de taille n, on dit que A est **inversible** s'il existe une matrice B carrée de taille n telle que :

$$AB = I_n \quad \text{et} \quad BA = I_n.$$

Alors B est *unique*, est appelée l'**inverse** de A et on note $B = A^{-1}$.

Remarque : S'il existe B de taille n telle que $AB = I_n$, alors automatiquement $BA = I_n$ (et on l'admet!) donc la deuxième condition $BA = I_n$ n'est pas nécessaire.

Proposition 3.9 (Inverse d'une matrice de $M_2(\mathbf{R})$) — *Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice de $M_2(\mathbf{R})$. Alors A est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$ et dans ce cas :*

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

*Le nombre $ad - bc$ est appelé le **déterminant** de A, noté $\det(A)$.*

Proposition 3.10 (Inverse d'une matrice diagonale) — *Une matrice diagonale de taille n est inversible si et seulement si tous ses coefficients diagonaux sont non nuls, et dans ce cas :*

Si $D = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{i,i} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}$ *alors* $D^{-1} = \begin{pmatrix} a_{1,1}^{-1} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{i,i}^{-1} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_{n,n}^{-1} \end{pmatrix}.$

3.3.2 Puissance k-ième

Définition 12 (Puissance k-ième d'une matrice) — Soit A une matrice carrée. On définit le carrée de A, noté A^2, comme $A^2 = A \times A$, et si $k \in \mathbf{N}^*$, on définit la puissance k-ième de A comme $A^k = \underbrace{A \times A \times \dots \times A}_{k \text{ fois}}$.

Proposition 3.11 (Puissance k-ième d'une matrice diagonale) — *Soit D une matrice diagonale d'ordre n dont les coefficients diagonaux sont $a_1, a_2, \dots, a_n$. Alors, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, D^k est la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont $a_1^k, a_2^k, \dots, a_n^k$. Autrement dit, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$,*

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{i,i} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} a_{1,1}^k & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{i,i}^k & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_{n,n}^k \end{pmatrix}.$$

IV Écriture matricielle d'un système linéaire

On considère le système de deux équations à deux inconnues (S) : $\begin{cases} 3x + 4y = 1 \\ 5x + 7y = -2. \end{cases}$

1) Déterminer trois matrices A, X et B de tailles respectives 2×2, 2×1 et 2×1 telles que le système (S) soit équivalent à l'égalité $AX = B$.

2) La matrice A est-elle inversible ?

3) En déduire que le système (S) admet une unique solution qu'on déterminera.

Définition 13 (Écriture matricielle d'un système linéaire) — On considère un système linéaire de n équations à n inconnues :

$$(S) : \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,n}x_n = b_n. \end{cases}$$

On peut alors associer à (S) trois matrices :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ & & & \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

appelées respectivement *matrice des coefficients*, *matrices des inconnues* et *matrices des seconds membres*, telles que le système (S) soit équivalent à l'égalité $AX = B$.
Cette égalité est appelée *écriture matricielle* de (S).

Théorème 3.12 (Admis) — *Un système linéaire dont l'écriture matricielle est $AX = B$ admet une unique solution si et seulement si A est inversible. Dans ce cas, la solution est $X = A^{-1}B$.*

V Exercices

Introduction

♦ **MAT.1** **Rentrée des classes**

À la rentrée des classes, des associations comparent les prix des fournitures scolaires chez différents distributeurs. Certains relevés figurent ci-dessous.

	1 lot de 3 cahiers grands formats	1 classeur souple	1 paquet de copies doubles	1 lot de 4 stylos	1 lot de 2 effaceurs
Distributeur 1	5,40 €	2,20 €	8,55 €	1,10 €	1,20 €
Distributeur 2	4,85 €	2,08 €	7,60 €	2,50 €	0,85 €
Distributeur 3	4,10 €	2,60 €	6,90 €	1,95 €	1,25 €

1) Pour ses enfants, une famille doit acheter 15 cahiers grands formats, 6 classeurs souples, 3 paquets de copies doubles, 24 stylos et 4 effaceurs. Quelle formule permet de calculer le prix chez le distributeur 1 ? Chez le distributeur 2 ?

2) Le calcul pour le distributeur 1 peut être représenté par le produit matriciel suivant :

$$\begin{pmatrix} 5{,}4 & 2{,}2 & 8{,}55 & 1{,}1 & 1{,}2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Représenter de la même manière les calculs pour les distributeurs 2 et 3.

3) On souhaite représenter les 3 calculs (un pour chaque distributeur) sous forme d'une seule opération : quelle matrice est obtenue en calculant le produit ci-dessous ?

$$\begin{pmatrix} 5{,}4 & 2{,}2 & 8{,}55 & 1{,}1 & 1{,}2 \\ 4{,}85 & 2{,}08 & 7{,}6 & 2{,}5 & 0{,}85 \\ 4{,}1 & 2{,}6 & 6{,}9 & 1{,}95 & 1{,}25 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

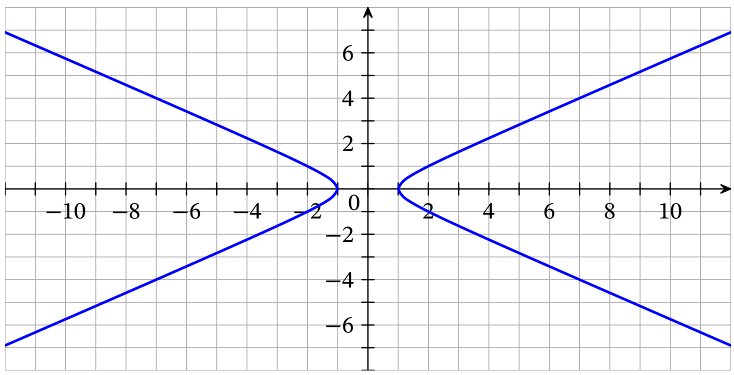
4) Quel distributeur est le moins cher pour cette liste de fournitures ?

5) Et pour la liste suivante : 15 cahiers, 8 classeurs souples, 2 paquets de copies doubles et 8 stylos ?

♦ MAT.2 — Points à coordonnées entières sur une courbe

Le plan est rapporté à un repère orthonormé. On considère l'ensemble E des points $M(x;y)$ du plan tels que $x^2 - 3y^2 = 1$. On cherche les points de E à coordonnées entières.

Partie A - Observation



À l'aide du graphique ci-contre où on a représenté l'ensemble des points appartenant à E en bleu, trouver des points de E à coordonnées entières.
Pourquoi suffit-il de chercher des points à coordonnées entières positives pour pouvoir répondre à la question posée ?

Partie B - De proche en proche

À tout point $M(x;y)$ on associe le point $M'(x';y')$ tel que

$$\begin{cases} x' = 2x + 3y \\ y' = x + 2y. \end{cases}$$

Soit P le point de coordonnées $(1;0)$. On nomme P_1 le point associé à P, puis P_2 le point associé à P_1, et ainsi de suite.

1) Déterminer les coordonnées de P_1, P_2 et P_3. Qu'observe-t-on ?

2) Montrer que si $M(x;y)$ appartient à E, alors le point M' appartient aussi à E.

3) En déduire deux nouveaux points à coordonnées entières positives appartenant à E.

4) Démontrer que si $x > 0$ et $y > 0$, alors $x' > x$ et $y' > y$. Que peut-on en déduire ?

Partie C - Écriture matricielle

1) Au point $M(x;y)$ on associe le point $M_1(x_1;y_1)$ puis à M_1 on associe $M_2(x_2;y_2)$.

a) Exprimer x_2 et y_2 en fonction de x et y.

b) Vérifier que le système $\begin{cases} x_1 = 2x + 3y \\ y_1 = x + 2y \end{cases}$ s'écrit

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ où } A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

c) Expliquer l'écriture $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

De la question b, déduire le résultat du calcul $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

d) Calculer $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Expliquer comment calculer $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

2) On rappelle que P est le point de coordonnées $(1;0)$ et P_1 est le point associé à P. Plus généralement, pour tout $n \in \mathbf{N}$, le point P_{n+1} est le point associé à P_n. On note

$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ la colonne de coordonnées de P_n.

a) Justifier que $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = A^2 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ où $A^2 = A \times A$. Exprimer de même $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ en fonction de $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

b) À la main, calculer A^4 et en déduire les coordonnées de P_4.

c) À la calculatrice, calculer A^{10} et en déduire les coordonnées de P_{10}.

♦ **MAT.3** Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Calculer AB et BA. Commenter.

♦ **MAT.4** (**Système** 2×2) Soit (S) : $\begin{cases} -2x + 4y = 3 \\ x - 3y = -7 \end{cases}$ le système d'inconnues réelles x et y.

On pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix}$.

1) Vérifier que le système (S) s'écrit sous la forme $AX = B$ où $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$.

2) Calculer le produit $\begin{pmatrix} -1{,}5 & -2 \\ -{,}05 & -1 \end{pmatrix} \times A$.

3) En déduire que $AX = B \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} -1{,}5 & -2 \\ -0{,}5 & -1 \end{pmatrix} \times B$.

4) En déduire la solution du système (S).

Applications

♦ **MAT.5** Dans tout l'exercice, M désigne la matrice $M = \begin{pmatrix} 5 & 6 & -9 \\ 2 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$, et I_3 désigne la matrice identité d'ordre 3.

1) a) Calculer $M^2 - 3M$ et exprimer cette matrice à l'aide de I_3.

b) En déduire que la matrice M est inversible et exprimer M^{-1} en fonction de M et I_3.

c) *Application* : résoudre le système (S) :

$$(S) : \begin{cases} 5x + 6y = 9z + 4 \\ 2x + y = 3z \\ 2x + 2y = 4z + 1 \end{cases}$$

2) a) Démontrer par récurrence qu'il existe deux suites réelles (a_n) et (b_n) telles que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $M^n = a_n M + b_n I_3$. On précisera a_0 et b_0 et on montrera que (a_n) et (b_n) vérifient :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \begin{cases} a_{n+1} = 3a_n + b_n \\ b_{n+1} = 4a_n \end{cases}$$

b) On note pour tout $n \in \mathbf{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

Déterminer A telle que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $X_{n+1} = AX_n$.

3) a) Soit P la matrice définie par $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Justifier que P est inversible et déterminer P^{-1}.

b) Calculer $P^{-1}AP$. On note D cette matrice.

c) Démontrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.

d) En déduire, pour tout $n \in \mathbf{N}$, les expression de a_n et b_n en fonction de n.

4) a) Déduire des questions précédentes, pour tout $n \in \mathbf{N}$, l'expression de M^n en fonction de n.

b) *Application* : on considère trois suites (u_n), (v_n) et (w_n) définies par $u_0 = 1$, $v_0 = 0$, $w_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$\begin{cases} u_{n+1} = 5u_n + 6v_n - 9w_n \\ v_{n+1} = 2u_n + v_n - 3w_n \\ w_{n+1} = 2u_n + 2v_n - 4w_n \end{cases}$$

Déterminer, pour tout $n \in \mathbf{N}$, les formes explicites de u_n, v_n et w_n.

♦ **MAT.6** Dans le plan muni d'un repère, on considère les points $A(3;11)$, $B(1;3)$ et $C(6;-2)$. On cherche une parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = ax^2 + bx + c$ passant par les points A, B et C.
Écrire sous forme matricielle un système vérifié par a, b, c puis le résoudre à l'aide d'une calculatrice.

♦ **MAT.7** Déterminer une fonction polynôme f telle que pour tous réel x, on ait :

$$(x^2 - 2)f''(x) + (1 - 3x)f'(x) + f(x) = x^3 + 6x^2 - 2x + 4.$$

♦ **MAT.8** On a observé l'évolution des inscriptions dans le club de gymnastique d'une ville.
Chaque année, 30% des personnes inscrites au club de gymnastique l'année précédente renouvellent leur inscription au club.
De plus, chaque année, 10% des habitants de la ville qui n'étaient pas inscrits au club l'année précédente s'y inscrivent.
La première année de fonctionnement du club (année « zéro »), 20% des habitants de la ville se sont inscrits.

Quel est l'état des inscriptions la 3e année de fonctionnement ? La 10e année ?

♦ MAT.9 (Valeurs propres en dimension 2)

Partie A - Valeurs propres

Dans toute cette partie, A désigne une matrice carrée d'ordre 2. On dit qu'un réel λ est une **valeur propre** de A s'il existe une matrice colonne **non nulle** X de taille 2×1 telle que $AX=\lambda X$. On dit alors que X est un **vecteur propre** de la matrice A, associé à la valeur propre λ.

1) Vérifier que $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur propre de la matrice $\begin{pmatrix}5&2\\3&4\end{pmatrix}$. Quelle est la valeur propre associée ?

2) Démontrer que si λ est une valeur propre de A et si X est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ, alors pour tout entier naturel n non nul, $A^nX=\lambda^nX$.

3) Démontrer qu'un réel λ est une valeur propre de A si et seulement si $A-\lambda I_2$ n'est pas inversible.

4) Dans cette question, on pose $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$.

- **a)** Démontrer qu'un réel λ est une valeur propre de A si et seulement si :
$$\lambda^2-(a+d)\lambda+ad-bc=0.$$
- **b)** Application : déterminer les valeurs propres de la matrice $A=\begin{pmatrix}-1&2\\1&-1\end{pmatrix}$.
- **c)** Existe-t-il des matrices carrées réelles d'ordre 2 qui n'admettent aucune valeur propre réelle ?
- **d)** Existe-t-il des matrices carrées réelles d'ordre 2 qui n'admettent aucune valeur propre, réelle ou complexe ?

Partie B - Irrationalité de $\sqrt{2}$

Le but de cette partie est de démontrer l'irrationalité de $\sqrt{2}$. On raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe deux entiers naturels p et q tels que $\sqrt{2}=\dfrac{p}{q}$.

On considère alors les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$\begin{cases}u_0=p\\v_0=q\end{cases},\quad \text{et pour tout entier } n\in\mathbf{N}, \begin{cases}u_{n+1}=-u_n+2v_n\\v_{n+1}=u_n-v_n.\end{cases}$$

- **a)** Démontrer que, pour tout $n\in\mathbf{N}$, $u_n\in\mathbf{Z}$ et $v_n\in\mathbf{Z}$.
- **b)** On note, pour tout $n\in\mathbf{N}$, $X_n=\begin{pmatrix}u_n\\v_n\end{pmatrix}$.
  - **1)** Montrer que pour tout $n\in\mathbf{N}$, $X_{n+1}=AX_n$ où $A=\begin{pmatrix}-1&2\\1&-1\end{pmatrix}$.
  - **2)** Démontrer que X_0 est un vecteur propre de A, associé à une valeur propre que l'on précisera.
  - **3)** En déduire, pour tout $n\in\mathbf{N}$, l'expression de u_n en fonction de n.
  - **4)** Justifier qu'il existe un certain rang N tel que $-1<u_N<1$ et en déduire que $p=0$.
- **c)** Conclure.

♦ MAT.10 (Matrices carrées d'ordre 2 inversibles à coefficients entiers)

On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des matrices carrées inversibles d'ordre 2 à coefficients entiers. Ainsi,

$$M\in\mathcal{A}\iff\exists(a,b,c,d)\in\mathbf{Z}^4, M=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\text{ et } M \text{ est inversible.}$$

Partie A - Éléments de $\mathcal{A}$ dont l'inverse appartient à $\mathcal{A}$

1) Soit $M=\begin{pmatrix}2&-1\\4&1\end{pmatrix}$.

- **a)** Montrer que $M\in\mathcal{A}$.
- **b)** La matrice M^{-1} appartient-elle à $\mathcal{A}$?

2) Soit $M\in\mathcal{A}$ telle que $\det M\in\{-1,1\}$. Justifier que M est inversible et que $M^{-1}\in\mathcal{A}$.

3) Soit $M\in\mathcal{A}$ une matrice inversible telle que $M^{-1}\in\mathcal{A}$. On note $\delta=\det M$.

- **a)** Montrer que δ divise les 4 coefficients de M.
- **b)** En déduire l'existence d'une matrice $N\in\mathcal{A}$ telle que $M=\delta N$.
- **c)** Montrer que $\delta=\delta^2\times\det N$ et conclure que $\delta\in\{-1,1\}$.

4) Énoncer le résultat démontré dans les questions 2. et 3.

Partie B - Matrices inversibles de déterminant 1

On note B l'ensemble des matrices $M\in\mathcal{A}$ telles que $\det M=1$. On note, de plus,

$$S=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad T=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}.$$

Si A est une matrice inversible et $n\in\mathbf{N}$, on pose $\mathcal{A}^{-n}=(\mathcal{A}^{-1})^n$. Le but de cette partie est de montrer que toute matrice $M\in B$ peut s'écrire comme un produit de puissances de S et de puissances de T (ces puissances pouvant être positives ou négatives).

Ainsi, par exemple, la matrice $M=\begin{pmatrix}-1&-4\\3&11\end{pmatrix}$ peut s'écrire $M=ST^2ST^{-1}S^{-1}T^3$.

1) Montrer que $S \in B$ et $T \in B$.

2) Les matrices S et T commutent-elles ?

3) Montrer que si $M \in B$ et $N \in B$ alors $MN \in B$.

☞ **Indications exercice 10 :** Poser $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ et calculer explicitement MN.

4) a) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$T^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbf{Z}$,

$$T^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5) On va montrer que toute matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in B$ peut s'écrire comme un produit de puissances de S et de puissances de T en raisonnant par récurrence sur $|c|$.

a) On suppose que $|c| = 0$. Montrer que $M = T^b$ ou $M = S^2T^{-b}$.

b) On suppose qu'il existe un entier $k \in \mathbf{N}$ tel que, pour toute matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in B$, si $|c| \leq k$ alors M s'écrit comme un produit de puissances de S et de puissances de T.

Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in B$ une matrice telle que $|c| = k+1$. On note q le quotient dans la division euclidienne de a par c. En considérant la matrice $ST^{-q}M$, montrer que M peut s'écrire comme un produit de puissances de S et de puissances de T.

c) Conclure.

6) (facultatif) Soit $M = \begin{pmatrix} 102 & 43 \\ -19 & -8 \end{pmatrix}$.

a) Vérifier que $M \in B$.

b) Écrire M comme un produit de puissances de S et de puissances de T.

c) Une telle écriture est-elle unique ?

♦ MAT.11 (Matrices orthogonales d'ordre 2)

Dans toute la suite, le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

On rappelle que si $\vec{u}$ est un vecteur de coordonnées $(x; y)$, la norme du vecteur $\vec{u}$ est

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Si $\vec{u}$ est un vecteur de coordonnées $(x; y)$, on note $M_{\vec{u}}$ la matrice colonne

$$M_{\vec{u}} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Si A est une matrice carrée d'ordre 2, si $\vec{u}$ est un vecteur du plan et si $A \times M_{\vec{u}} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, on note $A(\vec{u})$ le vecteur du plan de coordonnées $(x'; y')$.

Par exemple, si $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{u}(2; -1)$ alors $M_{\vec{u}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ donc $A \times M_{\vec{u}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ et ainsi $A(\vec{u})$ est le vecteur de coordonnées $(4; 6)$.

On dit qu'une matrice carrée A d'ordre 2 est orthogonale si, pour tout vecteur $\vec{u}$ du plan, $\|A(\vec{u})\| = \|\vec{u}\|$. Ainsi, une matrice orthogonale est une matrice qui conserve la norme des vecteurs.

Dans toute la suite, lorsqu'on dit qu'une matrice est orthogonale, il est sous-entendu qu'il s'agit d'une matrice carrée d'ordre 2.

Partie A - Exemples de matrices orthogonales

1) Donner un exemple simple de matrice orthogonale.

2) Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ est orthogonale.

3) Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \frac{1}{\sqrt{2}}B$.

a) Soit $\vec{u}(1; 0)$. Déterminer les coordonnées de $B(\vec{u})$. La matrice B est-elle orthogonale ?

b) Soit x et y deux réels et $\vec{u}$ le vecteur de coordonnées $(x; y)$. Déterminer les coordonnées de $C(\vec{u})$ et en déduire que C est orthogonale.

Partie B - Déterminant et inverse d'une matrice orthogonale

Dans toute cette partie, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est une matrice orthogonale.

1) Démontrer que, pour tout $(x; y) \in \mathbf{R}^2$,

$$a^2x^2 + 2abxy + b^2y^2 + c^2x^2 + 2cdxy + d^2y^2 = x^2 + y^2.$$

2) En utilisant l'égalité précédente successivement avec $(x; y) = (1; 0)$, $(x; y) = (0; 1)$ et $(x; y) = (1; 1)$, montrer que

$$a^2 + c^2 = 1, \quad b^2 + d^2 = 1, \quad ab + cd = 0.$$

3) Justifier que $a^2b^2 = c^2d^2$ et en déduire que $a^2 + b^2 = 1$.

4) Calculer $(ad-bc)^2$ et en déduire que $\det A = 1$ ou $\det A = -1$.

5) a) Justifier que A est inversible.

b) Montrer que $c^2+d^2=1$.

c) Montrer que $a^2=d^2$ et que $b^2=c^2$.

d) Montrer que $(ac+bd)^2 = a^2(c^2-b^2)+b^2(d^2-a^2)$ et en déduire la valeur de $ac+bd$.

e) Déduire des questions précédentes que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}.$$

Partie C - Réciproques (facultatif)

Dans toute cette partie, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ désigne une matrice carrée d'ordre 2.

1) On a vu dans la Partie B que si A est orthogonale alors $\det A = 1$ ou $\det A = -1$. La réciproque de cette implication est-elle vraie ?

2) On a vu dans la Partie B que si A est orthogonale alors A est inversible et

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}.$$

La réciproque de cette implication est-elle vraie ?

Partie D - Liens avec le produit scalaire (facultatif)

1) Montrer qu'une matrice carrée A d'ordre 2 est orthogonale si et seulement si A conserve le produit scalaire, i.e. si et seulement si, pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$,

$$A(\vec{u})\cdot A(\vec{v}) = \vec{u}\cdot\vec{v}.$$

2) Est-il vrai qu'une matrice carrée A d'ordre 2 est orthogonale si et seulement si elle conserve l'orthogonalité, i.e. si et seulement si, pour tous vecteurs orthogonaux $\vec{u}$ et $\vec{v}$, $A(\vec{u})$ et $A(\vec{v})$ sont orthogonaux ?

♦ MAT.12 (Autour des matrices nilpotentes d'ordre 2)

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On dit qu'une matrice N carrée d'ordre n est nilpotente s'il existe un entier $k>0$ tel que $N^k = O_n$.

Partie A - Exemples et contre-exemples de matrices nilpotentes

1) Soit $n \in \mathbf{N}^*$. La matrice O_n est-elle nilpotente ? La matrice I_n est-elle nilpotente ?

2) Montrer que la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est nilpotente.

3) Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Soient M et N deux matrices carrées d'ordre n. On suppose que N est nilpotente et que M et N commutent. Montrer que MN est nilpotente.

4) a) Montrer qu'une matrice nilpotente n'est pas inversible.

b) En déduire que la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

n'est pas nilpotente.

Partie B - Indice de nilpotence d'une matrice carrée d'ordre 2

Dans toute cette partie,

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

est une matrice quelconque. Le nombre $a+d$ est appelé la *trace* de A et on le note $\mathrm{tr}(A)$.

1) Démontrer que $A^2 - \mathrm{tr}(A)A + \det(A)I_2 = O_2$.

2) On suppose à présent que A est une matrice nilpotente non nulle.

a) Déduire de la question précédente que $A^2 - \mathrm{tr}(A)A = O_2$.

b) On note p l'indice de nilpotence de A, i.e. le plus petit entier naturel $k>0$ tel que $A^k = O_2$. Justifier que $p \geqslant 2$.

c) Montrer que $\mathrm{tr}(A)A^{p-1} = O_2$ et en déduire que $\mathrm{tr}(A) = 0$.

d) Conclure que $p=2$.

3) On a montré dans la Partie A que si A est nilpotente alors A n'est pas inversible. Que penser de la réciproque ?

4) On a montré dans la question 2.c. que si A est nilpotente alors $\mathrm{tr}(A)=0$. Que penser de la réciproque ?

Partie C - Exemple d'utilisation d'une matrice nilpotente

On considère deux suites (a_n) et (b_n) définies par : $a_0 = 1$, $b_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$\begin{cases} a_{n+1} = 4a_n + b_n \\ b_{n+1} = -9a_n - 2b_n \end{cases}$$

Pour tout entier naturel n, on pose

$$X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}.$$

1) Déterminer la matrice constante A carrée d'ordre 2 telle que, pour tout entier naturel n, $X_{n+1} = AX_n$.

2) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $X_n = A^n X_0$.

3) Montrer qu'il existe une matrice nilpotente N telle que $A = I_2 + N$.

4) Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $A^n = I_2 + nN$.

5) En déduire, pour tout $n \in \mathbf{N}$, les expressions de a_n et b_n en fonction de n.

Partie D - Facultative

Déterminer toutes les matrices carrées d'ordre 2 qui sont nilpotentes. (Il y en a une infinité donc on attend les différentes « formes » possibles pour une telle matrice.)

♦ MAT.13 L'équation $x^2 - 7y^2 = 1$

On considère l'équation (E) : $x^2 - 7y^2 = 1$ d'inconnue $(x;y) \in \mathbf{N}^2$. On cherche donc les solutions de (E) qui sont formées de nombres entiers naturels et, dans toute la suite, il est sous-entendu quand on parle de solutions que ce sont des couples de nombres entiers naturels.

1) Déterminer toutes les solutions $(x;y)$ de (E) telles que $0 \leqslant x \leqslant 8$.

2) On pose

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 21 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}.$$

On considère la suite de matrices (X_n) définie par

$$X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{et, pour tout } n \in \mathbf{N}, \quad X_{n+1} = AX_n.$$

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on définit les réels u_n et v_n par

$$X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}.$$

a) Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, u_n et v_n sont des entiers naturels et que $u_n > 0$.

b) Démontrer que la suite (u_n) est strictement croissante.

c) Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $(u_n; v_n)$ est une solution de (E).

d) En déduire que (E) possède une infinité de solutions.

e) Soit $N \in \mathbf{N}^*$. Écrire en langage Python une fonction `solution(N)` qui renvoie une solution $(x;y)$ de (E) telle que x et y comportent au moins N chiffres dans leurs écritures décimales. Justifier que l'exécution de cette fonction s'arrête et renvoie effectivement un couple $(x;y)$ convenable quelle que soit la valeur de N.

3) On pose

$$P = \begin{pmatrix} \sqrt{7} & -\sqrt{7} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad a = 8+3\sqrt{7}, \quad b = 8-3\sqrt{7}, \quad D = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}.$$

a) Justifier que P est inversible et calculer P^{-1}.

b) Vérifier que $PDP^{-1} = A$.

c) Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.

d) Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $X_n = A^n X_0$.

e) Déduire des questions précédentes que, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$u_n = \frac{a^n + b^n}{2} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{a^n - b^n}{2\sqrt{7}}.$$

4) (facultatif) On se propose de montrer que l'ensemble des solutions de (E) est exactement $\{(u_n; v_n) \mid n \in \mathbf{N}\}$. Pour cela, on considère une solution $(x;y)$ de (E) et on va montrer qu'il existe $k \in \mathbf{N}$ tel que $x = u_k$ et $y = v_k$.

a) Justifier qu'il existe un entier naturel k tel que $a^k \leqslant x + y\sqrt{7} < a^{k+1}$. Dans toute la suite, k désigne un tel entier et on pose $t = (x + y\sqrt{7})b^k$.

b) Montrer qu'il existe des entiers relatifs r et s tels que $t = r + s\sqrt{7}$. (On pourra commencer par exprimer b^k en fonction de u_k et v_k.)

c) Montrer que $1 \leqslant t < a$. (On pourra commencer par calculer ab.)

d) Montrer que $\dfrac{1}{t} = r - s\sqrt{7}$.

e) En déduire que $1 \leqslant r \leqslant 8$ et conclure.