

Fiche 15 | Convexité

Méthode 15.1

Comment déterminer la convexité d'une fonction ?

Dans le cadre deux fois dérivable au programme, on a le théorème suivant qui permet de conclure :

Théorème 15.1 — Soit f une fonction deux fois dérivable sur I . Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

- f est **convexe** sur I ;
- la courbe de f est au-dessus de ses tangentes;
- f' est croissante sur I ;
- f'' est positive sur I .

On a le même théorème, version concave :

Théorème 15.2 — Soit f une fonction deux fois dérivable sur I . Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

- f est **concave** sur I ;
- la courbe de f est en-dessous de ses tangentes;
- f' est décroissante sur I ;
- f'' est négative sur I .

☞ **Exemple 1 (Convexité de la fonction $f : x \mapsto x^3 - x^2$)** On calcule la dérivée de f :

$$f'(x) = 3x^2 - 2x$$

puis la dérivée seconde de f :

$$f''(x) = 6x - 2$$

Puis on étudie le signe de $f''(x)$:

x	$-\infty$	$1/3$	$+\infty$
Signe de $f''(x)$	$-$	0	$+$

Donc f est concave sur $\left]-\infty; \frac{1}{3}\right]$ et convexe sur $\left[\frac{1}{3}; +\infty\right[$.

Remarque 1 On peut aussi déterminer la convexité d'une fonction en ayant le tableau de variations de sa dérivée (voir l'exercice **CC.12** par exemple).

Méthode 15.2

Comment montrer qu'une fonction admet un point d'inflexion ?

Le cours à la rescousse :

Définition 1 (Point d'inflexion) — Si f est définie et deux fois dérivable sur I , un **point d'inflexion** de f est un point où f **change de convexité**.

Proposition 15.3 (CNS d'existence d'un point d'inflexion) — Si f est définie et deux fois dérivable sur I , alors f admet un point d'inflexion en $a \in I$ si et seulement si f'' s'annule et change de signe en a .

☞ **Exemple 2** Sur l'exemple précédent, la fonction $f : x \mapsto x^3 - x^2$ admet un point d'inflexion en $1/3$.