♦ **BAC.1** (**Amérique du Nord, J2 Secours 2025**) On considère la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par

$$f(x) = x\mathrm{e}^{-x} + 2x - 1.$$

On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbf{R}$.

On appelle $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.

On note f' la fonction dérivée de la fonction f et f'' la fonction dérivée seconde de f, c'est-à-dire la fonction dérivée de la fonction f'.

Partie A - Étude de la fonction f

1) Déterminer les limites de la fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$.

2) Pour tout réel x, calculer $f'(x)$.

3) Montrer que pour tout réel x :

$$f''(x) = (x-2)\mathrm{e}^{-x}.$$

4) Étudier la convexité de la fonction f.

5) Étudier les variations de la fonction f' sur $\mathbf{R}$, puis dresser son tableau de variations en y faisant apparaître la valeur exacte de l'extremum.
Les limites de la fonction f' aux bornes de l'intervalle de définition ne sont pas attendues.

6) En déduire le signe de la fonction f' sur $\mathbf{R}$, puis justifier que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbf{R}$.

7) Justifier qu'il existe un unique réel α tel que $f(\alpha) = 0$.
Donner un encadrement de α, au centième près.

8) On considère la droite Δ d'équation $y = 2x - 1$.
Étudier la position relative de la courbe $\mathcal{C}_f$ par rapport à la droite Δ.

Partie B - Calcul d'aire

Sera vu avec le chapitre 10.

Soit n un entier naturel non nul. On considère l'aire du domaine D_n délimité par la courbe $\mathcal{C}_f$, la droite Δ et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = n$. On note

$$I_n = \int_1^n x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x.$$

1) À l'aide d'une intégration par parties, exprimer I_n en fonction de n.

2) a) Justifier que l'aire du domaine D_n est I_n.

b) Calculer la limite de l'aire du domaine D_n quand n tend vers $+\infty$.

♦ BAC.2 (Centres étrangers, J2 2025)

Partie A

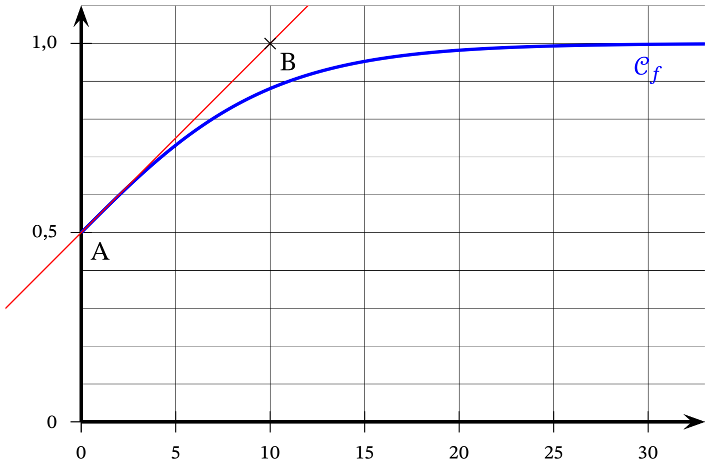
On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{a + \mathrm{e}^{-bx}},$$

où a et b sont deux constantes réelles strictement positives.

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

La fonction f admet pour représentation graphique la courbe $\mathcal{C}_f$ ci-dessous :



On considère les points A(0 ; 0,5) et B(10 ; 1).

On admet que la droite (AB) est tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A.

1) Par lecture graphique, donner une valeur approchée de $f(10)$.

2) On admet que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$.
Donner une interprétation graphique de ce résultat.

3) Justifier que $a = 1$.

4) Déterminer le coefficient directeur de la droite (AB).

5) a) Déterminer l'expression de $f'(x)$ en fonction de x et de la constante b.

b) En déduire la valeur de b.

Partie B

On admet, dans la suite de l'exercice, que la fonction f est définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(t) = \frac{1}{1 + \mathrm{e}^{-0{,}2x}}$$

1) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

3) Montrer qu'il existe un unique réel α positif tel que $f(\alpha) = 0{,}97$.

4) À l'aide de la calculatrice, donner un encadrement du réel a par deux nombres entiers consécutifs.
Interpréter ce résultat dans le contexte de l'énoncé.

Partie C

Sera vu avec le chapitre 10.