

♦ **BAC.1 (Amérique du Nord, J2 Secours 2025)** On considère la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par

$$f(x) = xe^{-x} + 2x - 1.$$

On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbf{R}$.

On appelle $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.

On note f' la fonction dérivée de la fonction f et f'' la fonction dérivée seconde de f , c'est-à-dire la fonction dérivée de la fonction f' .

Partie A - Étude de la fonction f

- 1) Déterminer les limites de la fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$.
- 2) Pour tout réel x , calculer $f'(x)$.
- 3) Montrer que pour tout réel x :

$$f''(x) = (x - 2)e^{-x}.$$

- 4) Étudier la convexité de la fonction f .
- 5) Étudier les variations de la fonction f' sur $\mathbf{R}$, puis dresser son tableau de variations en y faisant apparaître la valeur exacte de l'extremum.
Les limites de la fonction f' aux bornes de l'intervalle de définition ne sont pas attendues.
- 6) En déduire le signe de la fonction f' sur $\mathbf{R}$, puis justifier que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbf{R}$.
- 7) Justifier qu'il existe un unique réel α tel que $f(\alpha) = 0$.
Donner un encadrement de α , au centième près.
- 8) On considère la droite Δ d'équation $y = 2x - 1$.
Étudier la position relative de la courbe $\mathcal{C}_f$ par rapport à la droite Δ .

Partie B - Calcul d'aire

Sera vu avec le chapitre 10.

Soit n un entier naturel non nul. On considère l'aire du domaine D_n délimité par la courbe $\mathcal{C}_f$, la droite Δ et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = n$. On note

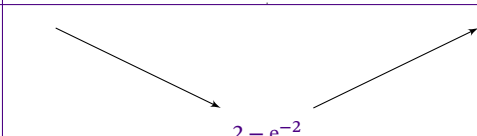
$$I_n = \int_1^n xe^{-x} dx.$$

- 1) À l'aide d'une intégration par parties, exprimer I_n en fonction de n .
- 2) a) Justifier que l'aire du domaine D_n est I_n .
b) Calculer la limite de l'aire du domaine D_n quand n tend vers $+\infty$.

ES Correction exercice 1 (Amérique du Nord, J2 Secours 2025) :

Partie A - Étude de la fonction f

- 1) • Déterminons la limite quand x tend vers $-\infty$:
 $\forall x \in \mathbf{R}, f(x) = x(e^{-x} + 2) - 1$.
 Avec $y = -x$, par composition, on a : $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = \lim_{y \rightarrow +\infty} e^y = +\infty$.
 Donc, par limite de la somme : $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} + 2 = +\infty$.
 Par limite du produit, il vient : $\lim_{x \rightarrow -\infty} x(e^{-x} + 2) = -\infty$.
 Enfin, par limite de la somme : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x(e^{-x} + 2) - 1 = -\infty$.
 • Déterminons la limite quand x tend vers $+\infty$:
 D'après la propriété des croissances comparées : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.
 Par limite de l'inverse : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = 0$.
 Par ailleurs, 2 étant positif : $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x - 1 = +\infty$.
 Par limite de la somme on en déduit : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} + 2x - 1 = +\infty$.
- 2) On a admis que la fonction est dérivable sur $\mathbf{R}$. f est la somme d'une fonction affine et d'un produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbf{R}$.
 Pour tout réel x , on a :
 $f'(x) = 1 \times e^{-x} + x \times (-e^{-x}) + 2 = (1 - x)e^{-x} + 2$.
- 3) On a admis que f' est dérivable :
 Pour tout réel x , on a :
 $f''(x) = -1 \times e^{-x} + (1 - x) \times (-e^{-x}) + 0 = (-1 - (1 - x))e^{-x} = (x - 2)e^{-x}$.
 On arrive bien à l'expression annoncée.
- 4) La fonction exponentielle est à valeurs strictement positives sur $\mathbf{R}$, donc $f''(x)$ est du signe de $(x - 2)$.
 - Sur l'intervalle $] -\infty ; 2]$, $(x - 2) \leq 0$, donc f'' est à valeurs négatives et donc f est **concave** sur $] -\infty ; 2]$.
 - Sur l'intervalle $[2 ; +\infty[$, $(x - 2) \geq 0$, donc f'' est à valeurs positives et donc f est **convexe** sur $[2 ; +\infty[$.
- 5) • Sur l'intervalle $] -\infty ; 2]$, f est concave, donc f' est décroissante.
 • Sur l'intervalle $[2 ; +\infty[$, f est convexe, donc f' est croissante.
 f' atteindra donc un minimum pour $x = 2$. On a :
 $f'(2) = (1 - 2)e^{-2} + 2 = 2 - e^{-2}$.
 On peut donc établir le tableau de variations (sans limites, car non attendues ici) de f' .

x	$-\infty$	2	$+\infty$
signe de $f''(x)$	-	0	+
variations de f'			

- 6) Comme on a $-2 < 0$, on en déduit, par croissance de la fonction exponentielle : $e^{-2} \leq e^0$.
 $e^{-2} \leq e^0 \Rightarrow e^{-2} \leq 1$
 $\Rightarrow -e^{-2} \geq -1$ car $-1 < 0$
 $\Rightarrow 2 - e^{-2} \geq 2 - 1$
 $\Rightarrow 2 - e^{-2} \geq 1$
 Le minimum de f' est donc un réel supérieur à 1, donc strictement positif.
 On en déduit que f' est donc une fonction à valeurs strictement positives sur $\mathbf{R}$, en conséquence, f est effectivement une fonction strictement croissante sur $\mathbf{R}$.
- 7) f est une fonction **continue** (car dérivable) et **strictement croissante** sur $\mathbf{R}$. De plus 0 est une **valeur intermédiaire** entre $\lim_{x \rightarrow -\infty} f = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = +\infty$.
 En vertu du corollaire au théorème des valeurs intermédiaires appliqué aux fonctions strictement monotones, on en déduit qu'il existe un unique réel α tel que $f(\alpha) = 0$.
 Par exploration à la calculatrice, on peut donner pour α l'encadrement au centième près suivant : $0,37 < \alpha < 0,38$.
- 8) Pour tout x réel, on a :
 $f(x) - (2x - 1) = xe^{-x}$.
 Comme la fonction exponentielle est à valeurs strictement positives sur $\mathbf{R}$, on en déduit que cette différence entre l'ordonnée $f(x)$ d'un point sur C_f et celle $2x - 1$ du point partageant la même abscisse sur Δ est du signe de x .
 Sur $\mathbf{R}^-$, la différence est donc négative, et on en déduit que la courbe C_f est **au-dessous** de la droite Δ .
 Sur $\mathbf{R}^+$, au contraire, la différence est positive, et donc la courbe C_f est **au-dessus** de la droite Δ .

Partie B - Calcul d'aire

Chapitre 10.

♦ **BAC.2 (Centres étrangers, J2 2025)**

Partie A

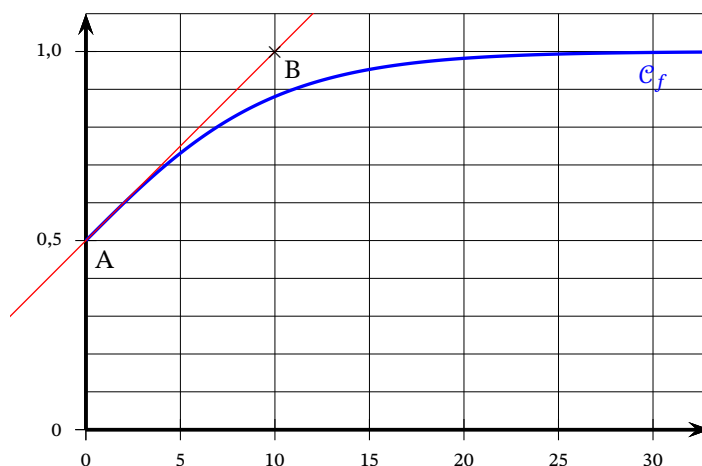
On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{a + e^{-bx}},$$

où a et b sont deux constantes réelles strictement positives.

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

La fonction f admet pour représentation graphique la courbe $\mathcal{C}_f$ ci-dessous :



On considère les points $A(0; 0,5)$ et $B(10; 1)$.

On admet que la droite (AB) est tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A.

- 1) Par lecture graphique, donner une valeur approchée de $f(10)$.
- 2) On admet que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$.
Donner une interprétation graphique de ce résultat.
- 3) Justifier que $a = 1$.
- 4) Déterminer le coefficient directeur de la droite (AB) .
- 5) a) Déterminer l'expression de $f'(x)$ en fonction de x et de la constante b .
b) En déduire la valeur de b .

Partie B

On admet, dans la suite de l'exercice, que la fonction f est définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par :

$$f(t) = \frac{1}{1 + e^{-0,2x}}$$

- 1) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- 2) Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.
- 3) Montrer qu'il existe un unique réel α positif tel que $f(\alpha) = 0,97$.
- 4) À l'aide de la calculatrice, donner un encadrement du réel α par deux nombres entiers consécutifs.
Interpréter ce résultat dans le contexte de l'énoncé.

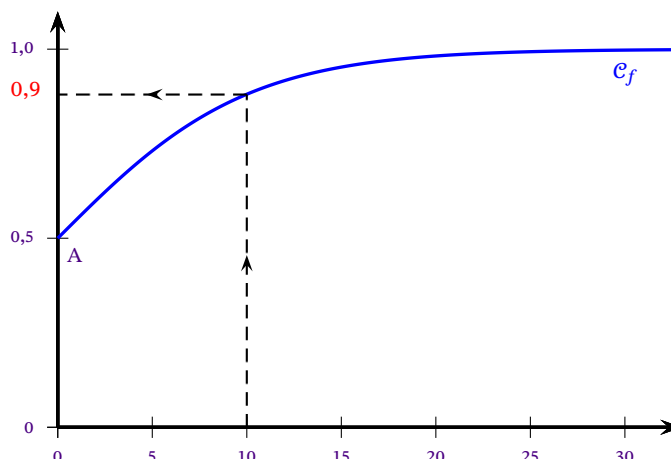
Partie C

Sera vu avec le chapitre 10.

ES Correction exercice 2 (Centres étrangers, J2 2025) :

Partie A

- 1) $1970 - 1960 = 10$. Donc on lit $f(10)$.



Dans la limite de précision du graphique, $f(10) \approx 0,9$.

- 2) Si $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 1$ alors C_f admet une asymptote horizontale d'équation $y = 1$ au voisinage de $+\infty$.
- 3) $f(0) = \frac{1}{2}$ donc $\frac{1}{a+1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a+1 = 2 \Leftrightarrow a = 1$.
- 4) Soit m ce coefficient directeur. $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0,5}{10} = 0,05$.
- 5) a) La fonction f est continue et dérivable sur $[0; +\infty[$. $f(t)$ est de la forme $\frac{1}{u(t)}$, de dérivée $-\frac{u'(t)}{u^2(t)}$. Donc en posant $u(t) = a + e^{-bt}$,
 $u'(t) = -be^{-bt}$
 Donc $\forall t \in [0; +\infty[$, $f'(t) = -\frac{-be^{-bt}}{(1 + e^{-bt})^2} = \frac{be^{-bt}}{(1 + e^{-bt})^2}$.
- b) Le nombre dérivée de f en 0 est égale à la pente de la droite (AB) , tangente à C_f au point d'abscisse 0. Donc $f'(0) = 0,05$ donc $\frac{b}{2^2} = 0,05$ donc $b = 4 \times 0,05 = 0,2$.

Partie B

On admet, dans la suite de l'exercice, que le taux d'équipement en réfrigérateurs est représenté par la fonction f définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par : $f(t) = \frac{1}{1 + e^{-0,2t}}$.

- 1) $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-0,2t} = 0$ (par composition). Donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 1$.
- 2) La fonction f est continue et dérivable sur $[0; +\infty[$, de la forme $\frac{1}{u(t)}$, de dérivée $-\frac{u'(t)}{u^2(t)}$.
 Donc en posant $u(t) = 1 + e^{-0,2t}$, $u'(t) = -0,2e^{-0,2t}$, $\forall t \in [0; +\infty[$, $f'(t) = -\frac{-0,2e^{-0,2t}}{(1 + e^{-0,2t})^2}$ soit $f'(t) = \frac{0,2e^{-0,2t}}{(1 + e^{-0,2t})^2}$.
 $\forall t \in [0; +\infty[$, $0,2e^{-0,2t} > 0$ et $(1 + e^{-0,2t})^2 > 0$ donc $f'(t) > 0$ donc f est croissante sur $[0; +\infty[$.
- 3) On a $f(0) = \frac{1}{2}$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 1$.
 La fonction f est continue strictement croissante sur $[0; +\infty[$ à valeurs dans $\left[\frac{1}{2}; 1\right[$. Or $0,97 \in \left[\frac{1}{2}; 1\right[$, donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0,97$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[0; +\infty[$.
- 4) Avec la calculatrice $\alpha \approx 17,4$ donc $\alpha \in]17; 18[$.

Partie C

Chapitre 10.