Chapitre 5

Loi Binomiale

Ce n'est qu'en essayant continuellement que l'on finit par réussir, donc plus ça rate, plus on a de chances que ça marche.

La fusée interplanétaire des Shadoks n'était pas très au point, mais ils avaient calculé qu'elle avait quand même une chance sur un million de marcher. Et ils se dépêchaient de bien rater les 999999 premiers essais pour être sûrs que le millionième marche.

Jacques Rouxel (1931-2004).

I Rappels sur les variables aléatoires

5.1.1 Concepts fondamentaux

Définition 1 — Une variable aléatoire notée X est une **fonction** de Ω dans $\mathbf{R}$.
Cette année, le programme considère des ensembles Ω finis et donc un nombre fini de valeurs prises par X. On note :

$$\begin{aligned} X : \Omega &\to \mathbf{R} \\ \omega &\mapsto X(\omega). \end{aligned}$$

Définition 2 — Donner la **loi de probabilité** d'une variable aléatoire X, c'est donner toutes les valeurs $p_i = \mathbf{P}(X = x_i)$ où $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est l'ensemble des valeurs prises par X.

☞ **Exemple 1** On démarre avec un exemple : on possède une urne qui contient 2 boules blanches, 3 boules rouges et 5 boules noires. L'expérience est la suivante : on mise 3 euros, et on tire une seule boule de l'urne.
- si on tire une boule blanche, on gagne 10 euros ;
- si on tire une boule rouge, on gagne 1 euro ;
- si on tire une boule noire, on ne gagne rien.

Dans cet exemple, si X est le gain final après l'expérience, X peut prendre 3 valeurs : -3, -2 et 7.
On peut représenter la loi de probabilité de X dans un tableau :

x_i			
$\mathbf{P}(X = x_i)$			

5.1.2 Espérance, variance, écart-type

Définition 3 (Espérance, variance, écart-type) — Soit X une variable aléatoire, on note $X(\Omega) = \{x_1 ; \ldots ; x_n\}$, et $p_i = \mathbf{P}(X = x_i)$.
Par définition **l'espérance** de X est notée $\mathbf{E}(X)$ et vaut :

De plus, **la variance** de X est notée $\mathbf{V}(X)$ et vaut :

Enfin, **l'écart-type** de X est noté $\sigma(X)$ et vaut :

☞ **Exemple 2** On calcule l'espérance pour notre variable aléatoire X :

5.1.3 Probabilités conditionnelles

Dans ce paragraphe, tous les évènements sont liés à une même expérience aléatoire modélisée par une probabilité $\mathbf{P}$ et un univers Ω.

Définition 4 (Probabilité conditionnelle) — Soit A un événement de probabilité non nulle et B un évènement quelconque. On définit la probabilité de B sachant A par :

☞ **Exemple 3** On lance un dé cubique à six faces équilibré. Quelle est la probabilité d'obtenir 6 sachant que le chiffre affiché est pair ?

Proposition 9.1 — *Soit A un évènement de probabilité non nulle. Alors, la fonction $\mathbf{P}_A$ qui à tout évènement B de Ω associa la probabilité conditionnelle $\mathbf{P}_A(B)$ est une loi de probabilité sur Ω.*
En particulier, pour tout évènement B,

Proposition 9.2 — *Soit A et B deux évènements.*

5.1.4 Arbres pondérés

Proposition 9.3 (Règles de calculs sur les arbres pondérés) —

- *Loi des nœuds : La somme des probabilités des branches partant d'un même nœud est égale à 1.*
- *La probabilité d'un chemin est le produit des probabilités des branches qui composent ce chemin.*

☞ **Exemple 4**
On considère une urne qui contient exactement 5 boules : 3 boules rouges et deux boules noires. On effectue successivement et sans remise deux tirages au hasard d'une boule dans l'urne. On note les évènements :

- R_1 : « la première boule tirée est rouge ».
- R_2 : « la seconde boule tirée est rouge ».

Représenter cette expérience à l'aide d'un arbre pondéré et calculer les probabilités de R_1 et R_2.

5.1.5 Formule des probabilités totales

Définition 5 — On dit que deux évènements A et B sont **incompatibles** (ou disjoints) si $A \cap B = \varnothing$.

Définition 6 — On dit que $n \geqslant 2$ évènements $A_1, A_2, ..., A_n$ sont **mutuellement incompatibles** (ou deux à deux incompatibles) si $i \neq j \quad \Leftrightarrow A_i$ et A_j sont incompatibles.

☞ **Exemple 5** On lance un dé cubique. Les évènements A_1 : « Obtenir un chiffre inférieur ou égal à 2 », A_2 : « Obtenir un multiple de 3 », A_3 : « Obtenir 4 ou 5 » sont mutuellement incompatibles.
Les évènements B_1 : « Obtenir un multiple de 3 » et B_2 : « Obtenir un chiffre supérieur ou égal à 4 » sont-ils incompatibles ?

Proposition 9.4 — *Si $A_1, A_2, ..., A_n$ $(n \geqslant 2)$ sont des évènements mutuellement incompatibles alors :*

Définition 7 (Partition) — Soit un entier $n \geqslant 2$. On dit que des évènements $A_1, A_2, ..., A_n$ forment une **partition** de l'univers (ou un **système complet d'évènements**) si :
- les évènements $A_1, A_2, ..., A_n$ sont mutuellement incompatibles ;
- la réunion des évènements $A_1, A_2, ..., A_n$ est égale à Ω.

Théorème 9.5 (Formule des probabilités totales) — *Soit un entier $n \geqslant 2$. Soit $A_1, A_2, ..., A_n$ des évènements formant une partition de l'univers.*
Alors, pour tout évènement B :

Si de plus, $\mathbb{P}(A_i) \neq 0$ pour tout $i \in \{1,2,...,n\}$, alors :

☞ **Exemple 6** On dispose de deux urnes. La première contient 3 boules rouges et deux boules noires et la seconde 4 boules rouges et 7 boules noires. On choisit une urne au hasard et on tire une boule dans cette urne au hasard.
- Quelle est la probabilité de tirer une boule rouge ?
- On a tiré une boule rouge. Quelle est la probabilité qu'elle provienne de la première urne ?

Proposition 9.6 (Règle de calcul dans un arbre pondéré, suite) — *Si plusieurs chemins d'un arbre mènent au même évènement E alors la probabilité de E est la somme des probabilités de tous les chemins qui mènent à E.*

5.1.6 Indépendance d'évènements

Définition 8 (Indépendance de deux évènements) — On dit que deux évènements A et B sont indépendants si $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) \times \mathbf{P}(B)$.

☞ **Exemple 7** On lance un dé cubique équilibré et on considère les évènements A : « On obtient un chiffre pair », B : « On obtient un chiffre supérieur ou égal à 4 » et C : « On obtient un chiffre inférieur ou égal à 4 ».
A et B sont-ils indépendants ? Et A et C ?

Proposition 9.7 — *Soit A et B deux évènements tels que $\mathbf{P}(A) \neq 0$. Alors, A et B sont indépendants si et seulement si $\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}_A(B)$.*

Proposition 9.8 — *Soit A et B deux évènements indépendants. Alors, $\overline{A}$ et B sont également indépendants.*

II Modèle de succession d'épreuves indépendantes

Définition 9 — On considère une succession de n expériences aléatoires modélisées par des probabilités $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, ..., $\mathbf{P}_n$ sur des univers respectifs $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_n$.
On dit que ces expériences sont indépendantes si, pour chaque expérience, la probabilité d'une issue ne dépend pas des résultats obtenus lors des expériences précédentes.

☞ **Exemple 8**

- On lance une pièce de monnaie équilibrée puis on lance un dé cubique équilibré. Cela constitue la succession de deux expériences aléatoires indépendantes.
- On lance 10 fois de suite la même pièce équilibrée. Cela constitue la succession de 10 expériences aléatoires indépendantes car le résultat obtenu lors d'un lancer ne dépend pas des résultats précédents. Ici, les 10 expériences sont identiques : on parle dans ce cas d'une répétition d'expériences identiques et indépendantes.

Définition 10 — On considère une succession de n expériences aléatoires modélisées par des probabilités $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, ..., $\mathbf{P}_n$ sur des univers respectifs $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_n$ et on suppose que ces expériences sont indépendantes.
On peut considérer cette succession d'expériences comme une expérience aléatoire sur l'univers $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \ldots \times \Omega_n$. Ainsi, une issue de cette expérience est un n-uplet $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ où $x_i \in \Omega_i$ pour tout entier i entre 1 et n.
On convient de plus de modéliser cette expérience par la probabilité $\mathbb{P}$ définie sur Ω par

$$\forall (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \Omega, \quad \mathbf{P}((x_1, x_2, \ldots, x_n)) = \mathbf{P}_1(x_1)\mathbf{P}_2(x_2)\ldots\mathbf{P}_n(x_n).$$

☞ **Exemple 9** On reprend les deux premiers exemples précédents.

- Si on note P pour « Obtenir pile », F pour « Obtenir face » , on a $\Omega_1 = \{P, F\}$ et $\Omega_2 = \{1,2,3,4,5,6\}$. Donner Ω, puis calculer $\mathbf{P}((F,5))$.
  Quelle est finalement la loi bien connue de probabilités $\mathbf{P}$ sur Ω ?

- Donner Ω_i et la loi de probabilité $\mathbf{P}$ pour le deuxième exemple.

- On tire successivement et avec remise 5 boules dans une urne contenant 3 boules rouges et 7 boules blanches. Ici, en notant R pour « rouge » et B pour « blanche » , on a ici $\Omega_i = \{R, B\}$ et $\Omega = \{R, B\}^5$. Calculer $\mathbf{P}((B,R,R,B,R))$.

III Schéma de Bernoulli et loi binomiale

5.3.1 Épreuve de Bernoulli

Définition 11 (Épreuve de Bernoulli) — Une **épreuve de Bernoulli** est une expérience aléatoire n'admettant que deux issues : un Succès (S) et un Échec ($\overline{S}$). On note en général p la probabilité de Succès et $q = 1 - p$ la probabilité d'un échec.

5.3.2 Variable aléatoire de Bernoulli

Définition 12 (Variable aléatoire de Bernoulli) — Une variable aléatoire X est une **variable aléatoire de Bernoulli** si elle est à valeur dans $\{0;1\}$ où 1 est la valeur attribuée au Succès. On note $p = \mathbf{P}(X = 1)$, p est alors le **paramètre** de la **loi de Bernoulli** que suit X :

x_i		
$\mathbf{P}(X = x_i)$		

Proposition 9.9 — *Si X est une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre p, alors :*
-
-
-

IV Loi Binomiale

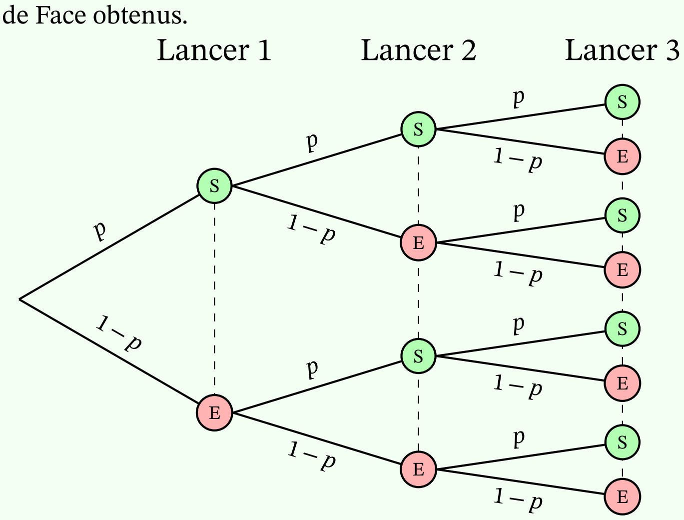
5.4.1 Définition

Définition 13 (Schéma de Bernoulli) — L'expérience aléatoire consistant à réaliser n épreuves de Bernoulli de **même paramètre** p et de **manière indépendante** est appelée **schéma de Bernoulli** de paramètre n et p.

☞ **Exemple 10** Si on lance 5 fois de suite un dé et qu'on s'intéresse à la face 6, on réalise un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 5$ et $p = \frac{1}{6}$.

Définition 14 (Loi binomiale) — Si on réalise un schéma de Bernoulli de paramètre n et p, la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de succès observés sur les n expériences suit une loi appelée **loi binomiale** de paramètre n et p. Cette loi est notée $\mathcal{B}(n,p)$.

☞ **Exemple 11** On lance trois fois de suite une pièce truquée qui a pour probabilité p de donner Face (qu'on considère être le "succès"). On note X le nombre de Face obtenus.



5.4.2 Expression de la loi binomiale

Proposition 9.10 (Expression de la loi binomiale) — *Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres (n,p) ($\mathcal{B}(n,p)$).*
Alors pour tout entier k compris entre 0 et n on a :

☞ **Exemple 12**

5.4.3 Espérance, variance de la loi binomiale

Proposition 9.11 (Espérance de la loi binomiale) — *Soit X une variable aléatoire suivant une loi $\mathcal{B}(n,p)$. Alors $\mathbf{E}(X) = np$.*

☞ **Exemple 13**

Proposition 9.12 (Variance, écart-type de la loi binomiale) — *Soit X une variable aléatoire suivant une loi $\mathcal{B}(n,p)$. Alors $\mathbf{V}(X) = np(1-p)$ et $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$.*

☞ **Exemple 14**

V Exercices

Arbres et conditionnement

♦ **BIN.1** Soit A et B deux évènements d'une expérience aléatoire. Les probabilités des évènements B et $A \cap B$ sont données par les égalités :

$$\mathbf{P}(B) = \frac{3}{4} \quad \text{et} \quad \mathbf{P}(A \cap B) = \frac{2}{5}.$$

1) Calculer $\mathbf{P}_B(A)$.

2) La probabilité de B sachant A est $\frac{2}{3}$. En déduire la probabilité de A.

3) Déterminer $\mathbf{P}(A \cup B)$.

♦ **BIN.2** Un sac S_1 contient 9 boules dont 5 rouges et un sac S_2 contient 5 boules dont 3 sont rouges. On choisit un sac au hasard et on tire une boule au hasard dans ce sac.
Par abus, on note S_1 : « Choisir le sac S_1 » et R : « Tirer une boule rouge ».

1) Représenter l'expérience par un arbre pondéré.

2) Quelle est la probabilité que la boule tirée soit rouge et provienne du sac S_1 ?

3) Quelle est la probabilité que la boule tirée soit rouge ?

4) Sachant que la boule tirée est rouge, quelle est la probabilité qu'elle provienne du sac S_1 ?

♦ **BIN.3** Des étudiants sont inscrits en L1 dans une université. À l'approche des examens, un stage de révision est organisé. L'expérience montre que les 3/4 des étudiants ayant suivi le stage de révision réussissent leurs examens et 1/3 des étudiants n'ayant pas suivi le stage ne réussissent pas leurs examens. On sait de plus que 20% des étudiants de L1 suivent le stage de révision.
On choisit un étudiant au hasard et on considère les évènements :

- S : « l'étudiant a suivi le stage de révision » ;
- E : « l'étudiant a réussi ses examens ».

1) Construire un arbre de probabilité traduisant la situation étudiée.

2) Si l'étudiant choisi a suivi le stage, quelle est la probabilité qu'il n'ait pas réussi ses examens ?

3) Quelle est la probabilité que l'étudiant choisi ait suivi le stage et réussi ses examens ?

4) Montrer que la probabilité que l'étudiant choisi ait réussi ses examens est $\frac{41}{60}$.

5) Sachant que l'étudiant choisi a réussi ses examens, quelle est la probabilité qu'il ait suivi le stage ? On donnera la valeur exacte sous forme de fractions irréductibles puis une valeur arrondie à 10^{-2} près.

6) L'université trouve que les résultats aux examens de L1 sont trop faibles et aimerait inciter plus d'étudiants à s'inscrire au stage de révision afin qu'au moins 70% des étudiants de L1 réussissent leurs examens. Sachant qu'il y a 300 étudiants inscrits en L1, combien de places faudra-t-il prévoir au minimum lors du stage pour espérer atteindre cet objectif ?

Loi Binomiale

♦ **BIN.4** Répondre aux questions à l'aide éventuellement de la calculatrice.

1) Donner $\binom{9}{0}$ et $\binom{9}{9}$.

2) On donne $\binom{9}{3} = 84$ et $\binom{9}{2} = 36$.
Donner $\binom{9}{6}$ et $\binom{9}{7}$ puis déterminer $\binom{10}{7}$.

♦ **BIN.5** Déterminer, si besoin à l'aide de la calculatrice, les coefficients binomiaux suivants :

1) $\binom{13}{0}$ **2)** $\binom{15}{6}$ **3)** $\binom{15}{9}$ **4)** $\binom{18}{1}$

♦ **BIN.6** Si X suit $\mathcal{B}(6\ ;\ 0{,}4)$, déterminer, à l'aide de la calculatrice, les probabilités suivantes :

1) $\mathbf{P}(X = 2)$ **2)** $\mathbf{P}(X = 0)$ **3)** $\mathbf{P}(X \leqslant 4)$

4) $\mathbf{P}(X \leqslant 6)$ **5)** $\mathbf{P}(X > 3)$ **6)** $\mathbf{P}(X \geqslant 5)$

♦ **BIN.7** Y suit une loi binomiale où
$P(Y \leqslant 15) = 0{,}65$ et $P(Y \leqslant 19) = 0{,}875$. Déterminer :

1) $\mathbf{P}(Y > 15)$ **2)** $\mathbf{P}(16 \leqslant Y \leqslant 19)$

♦ **BIN.8** Z suit la loi $\mathcal{B}(150\ ;\ 0{,}35)$. Déterminer :

1) $\mathbf{P}(Z = 50)$ **2)** $\mathbf{P}(30 \leqslant Z \leqslant 50)$

3) $\mathbf{P}(Z > 40)$ **4)** $\mathbf{P}(Z \leqslant 50)$

♦ **BIN.9** (**Représentation graphique d'une loi binomiale**)

1) Z est une variable aléatoire qui suit la loi $\mathcal{B}(4;0{,}3)$.

a) Tabuler $k \mapsto \mathbf{P}(Z = k)$ sur la calculatrice.

b) Construire un diagramme en bâtons représentant la loi de probabilité de Z.

2) Représenter graphiquement la loi $\mathcal{B}(6\ ;\ 0{,}7)$.

♦ **BIN.10** D'après des études statistiques, il naît plus de garçons que de filles en France.

Lors d'une naissance, la probabilité que le bébé soit un garçon est de 0,51.

Pour une famille de six enfants (on suppose qu'il n'y a pas de jumeaux), on note X la variable aléatoire donnant le nombre de filles.

1) Déterminer la loi de probabilité de X.

2) Déterminer la probabilité que cette famille n'ait que des garçons.

3) Déterminer la probabilité que cette famille ait autant de garçons que de filles.

♦ **BIN.11** Une usine produit des grille-pain, certains étant défectueux, et on suppose que la probabilité qu'un grille-pain soit défectueux est égale à 0,03.

On prélève au hasard un échantillon de 100 grille-pain dans la production d'une journée et on admet que cette production est suffisamment importante pour que l'on assimile ce prélèvement à un tirage avec remise de 100 grille-pain.

On considère la variable aléatoire X qui, à ce prélèvement de 100 grille-pain, associe le nombre de grille-pain défectueux.

Tous les résultats seront arrondis au centième.

1) Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

2) Quelle est la probabilité qu'il y ait 96 grille-pain en bon état dans ce prélèvement ?

3) Quelle est la probabilité de l'événement « au moins trois grille-pain sont défectueux » ?

4) a) Calculer l'espérance de la variable aléatoire X.
Interpréter ce résultat dans le cadre de l'énoncé.

b) Calculer $\mathbf{P}(X \leqslant \mathbf{E}(X))$.

♦ **BIN.12** Une tombola est organisée dans une école.

La directrice de l'école affirme qu'un billet sur trois est gagnant.

1) Bob a acheté quatre billets et il annonce qu'il est sûr de gagner.
On admet que l'achat de ces quatre billets est assimilable à un tirage avec remise et on note X le nombre de billets gagnants parmi les quatre.

a) Déterminer la probabilité que ses quatre billets soient gagnants.

b) Déterminer la probabilité qu'aucun de ses billets ne soit gagnant.

2) Combien de parties peut-il espérer gagner ?

♦ **BIN.13** (**Une question d'adresse**) Quand il tire du milieu de terrain de basket, Joe marque le panier avec une probabilité de 0,1.

Il tente sa chance n fois de suite du milieu de terrain et on suppose que les lancers sont indépendants les uns des autres.

On note X la variable aléatoire donnant le nombre de lancers réussis.

1) Quelle loi suit X ?

2) Déterminer la probabilité que Joe réussisse exactement deux lancers en fonction de n et $\binom{n}{2}$.

3) Déterminer la probabilité que Joe réussisse au moins un lancer en fonction de n.

♦ **BIN.14** Un ascenseur tombe en panne avec une probabilité de 0,015 chaque jour et une réparation coûte 500 euros.

On suppose que la panne (ou non) de l'ascenseur est indépendante de celles des jours précédents.

1) Quelle est la probabilité que l'ascenseur tombe exactement une fois en panne durant le mois de janvier ?

2) En moyenne, combien peut-on prévoir de dépenses de réparation pour une année ?

♦ **BIN.15** Mme Tortue est presque sourde de l'oreille gauche et 60% du temps, elle dort du côté gauche.

- Lorsqu'elle dort du côté gauche, elle entend le réveil avec une probabilité de 0,95 ;
- de l'autre côté, elle entend le réveil avec une probabilité de 0,2.

1) Déterminer la probabilité que Mme Tortue entende le réveil le matin.

2) On admet que le fait d'entendre le réveil un matin est indépendant du fait de l'entendre les autres jours.
Quelle est la probabilité que Mme Tortue dorme tranquillement durant une semaine sans entendre ses réveils ?

BAC

♦ **BIN.16** (**Métropole 2013**) Une jardinerie vend de jeunes plants d'arbres qui proviennent de trois horticulteurs : 35 % des plants proviennent de l'horticulteur H_1, 25 % de l'horticulteur H_2 et le reste de l'horticulteur H_3. Chaque horticulteur livre deux catégories d'arbres : des conifères et des arbres à feuilles.

La livraison de l'horticulteur H_1 comporte 80 % de conifères alors que celle de l'horticulteur H_2 n'en comporte que 50 % et celle de l'horticulteur H_3 seulement 30 %.

1) Le gérant de la jardinerie choisit un arbre au hasard dans son stock.
On envisage les événements suivants :

- H_1 : « l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H_1 »,
- H_2 : « l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H_2 »,
- H_3 : « l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H_3 »,
- C : « l'arbre choisi est un conifère »,
- F : « l'arbre choisi est un arbre feuillu ».

a) Construire un arbre pondéré traduisant la situation.

b) Calculer la probabilité que l'arbre choisi soit un conifère acheté chez l'horticulteur H_3.

c) Justifier que la probabilité de l'évènement C est égale à 0,525.

d) L'arbre choisi est un conifère.

Quelle est la probabilité qu'il ait été acheté chez l'horticulteur H_1 ? On arrondira à 10^{-3}.

2) On choisit au hasard un échantillon de 10 arbres dans le stock de cette jardinerie. On suppose que ce stock est suffisamment important pour que ce choix puisse être assimilé à un tirage avec remise de 10 arbres dans le stock.

On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de conifères de l'échantillon choisi.

a) Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

b) Quelle est la probabilité que l'échantillon prélevé comporte exactement 5 conifères ?

On arrondira à 10^{-3}.

c) Quelle est la probabilité que cet échantillon comporte au moins deux arbres feuillus ?

On arrondira à 10^{-3}.

♦ **BIN.17** (**Sujet 2 EDS 2020**) *Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point. Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.*

Partie A

Dans un centre de traitement du courrier, une machine est équipée d'un lecteur optique automatique de reconnaissance de l'adresse postale. Ce système de lecture permet de reconnaître convenablement 97% des adresses; le reste du courrier, que l'on qualifiera d'illisible pour la machine, est orienté vers un employé du centre chargé de lire les adresses. Cette machine vient d'effectuer la lecture de neuf adresses. On note X la variable aléatoire qui donne le nombre d'adresses illisibles parmi ces neuf adresses.

On admet que X suit la loi binomiale de paramètres $n = 9$ et $p = 0{,}03$.

1) La probabilité qu'aucune des neuf adresses soit illisible est égale, au centième près, à :

a) 0 **b)** 1 **c)** 0,24 **d)** 0,76

2) La probabilité qu'exactement deux des neuf adresses soient illisibles pour la machine est :

a) $\binom{9}{2}\times 0{,}97^2\times 0{,}03^7$ **c)** $\binom{9}{2}\times 0{,}97^7\times 0{,}03^2$

b) $\binom{7}{2}\times 0{,}97^2\times 0{,}03^7$ **d)** $\binom{7}{2}\times 0{,}97^7\times 0{,}03^2$

3) La probabilité qu'au moins une des neufs adresses soit illisible pour la machine est :

a) $\mathbf{P}(X<1)$ **c)** $\mathbf{P}(X\geqslant 2)$

b) $\mathbf{P}(X\leqslant 1)$ **d)** $1-\mathbf{P}(X=0)$

Partie B

Une urne contient 5 boules vertes et 3 boules blanches, indiscernables au toucher.
On tire au hasard successivement et sans remise deux boules de l'urne.
On considère les évènements suivants :

- V_1 : « la première boule tirée est verte »;
- B_1 : « la première boule tirée est blanche »;
- V_2 : « la seconde boule tirée est verte »;
- B_2 : « la seconde boule tirée est blanche ».

4) La probabilité de V_2 sachant que V_1 est réalisé, notée $\mathbf{P}_{V_1}(V_2)$, est égale à :

a) $\frac{5}{8}$ **b)** $\frac{4}{7}$ **c)** $\frac{5}{14}$ **d)** $\frac{20}{56}$

5) La probabilité de l'évènement V_2 est égale à :

a) $\frac{5}{8}$ **b)** $\frac{5}{7}$ **c)** $\frac{3}{28}$ **d)** $\frac{9}{7}$

♦ **BIN.18** (**Sujet 1 EDS 2020**) Dans une école de statistique, après étude des dossiers des candidats, le recrutement se fait de deux façons :

- 10% des candidats sont sélectionnés sur dossier. Ces candidats doivent ensuite passer un oral à l'issue duquel 60% d'entre eux sont finalement admis à l'école.
- Les candidats n'ayant pas été sélectionnés sur dossier passent une épreuve écrite à l'issue de laquelle 20% d'entre eux sont admis à l'école.

Partie A

On choisit au hasard un candidat à ce concours de recrutement.
On notera :

- D l'évènement « le condidat a été sélectionné sur dossier »;
- A l'évènement « le candidat a été admis à l'école »;
- $\overline{D}$ et $\overline{A}$ les évènements contraires des évènements D et A respectivement.

1) Traduire la situation par un arbre pondéré.

2) Calculer la probabilité que le candidat soit sélectionné sur dossier et admis à l'école.

3) Montrer que la probabilité de l'évènement A est égale à 0,24.

4) On choisit au hasard un candidat admis à l'école. Quelle est la probabilité que son dossier n'ait pas été sélectionné ?

Partie B

1) On considère un échantillon de sept candidats choisis au hasard, en assimilant ce choix à un tirage au sort avec remise. On désigne par X la variable aléatoire dénombrant les candidats admis à l'école parmi les sept tirés au sort, et on suppose que les résultats des candidats sont indépendants les uns des autres.

a) Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

b) Calculer la probabilité (arrondie au centième) qu'un seul des sept candidats tirés au sort soit admis à l'école.

c) Calculer la probabilité (arrondie au centième) qu'au moins deux des sept candidats tirés au sort soient admis à cette école.

2) Un lycée présente n candidats au recrutement dans cette école où $n \in \mathbf{N}^*$. On admet que la probabilité pour un candidat quelconque du lycée d'être admis à l'école est égale à 0,24 et que les résultats des candidats sont indépendants les uns des autres.

a) Donner l'expression, en fonction de n, de la probabilité qu'aucun candidat issu de ce lycée ne soit admis à l'école.

b) À partir de quelle valeur de l'entier n la probabilité qu'au moins un élève soit admis à l'école est-elle supérieure ou égale à 0,99 ?

♦ **BIN.19** Un site internet propose un jeu en ligne. On sait que :

- si l'internaute gagne une partie, la probabilité qu'il gagne la partie suivante est égale à $\frac{2}{5}$.
- si l'internaute perd une partie, la probabilité qu'il perde la partie suivante est égale à $\frac{4}{5}$.

Pour tout entier naturel non nul n, on désigne par G_n l'évènement « l'internaute gagne la n-ième partie » et on note p_n la probabilité de l'évènement G_n.
L'internaute gagne toujours la première partie et donc $p_1 = 1$.

1) Traduire l'énoncé par un arbre pondéré.

2) Justifier que pour tout entier naturel n,

$$[G_{n+1}] = [G_{n+1} \cap G_n] \cup \left[G_{n+1} \cap \overline{G_n}\right].$$

3) Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $p_{n+1} = \frac{1}{5}p_n + \frac{1}{5}$.

4) Pour tout entier naturel n non nul, on pose $u_n = p_n - \frac{1}{4}$.

a) Montrer que (u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$ et préciser u_1.

b) Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, $p_n = \frac{3}{4} \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} + \frac{1}{4}$.

c) Déterminer la limite de p_n quand n tend vers $+\infty$.

♦ **BIN.20** (**EDS Amérique du Nord Mai 2021**) Les probabilités demandées dans cet exercice seront arrondies à 10^{-3}.

Un laboratoire pharmaceutique vient d'élaborer un nouveau test anti-dopage.

Partie A

Une étude sur ce nouveau test donne les résultats suivants :

- si un athlète est dopé, la probabilité que le résultat du test soit positif est 0,98 (sensibilité du test) ;
- si un athlète n'est pas dopé, la probabilité que le résultat du test soit négatif est 0,995 (spécificité du test).

On fait subir le test à un athlète sélectionné au hasard au sein des participants à une compétition d'athlétisme.

On note D l'évènement « l'athlète est dopé » et T l'évènement « le test est positif ».

On admet que la probabilité de l'évènement D est égale à 0,08.

1) Traduire la situation sous la forme d'un arbre pondéré.

2) Démontrer que $\mathbf{P}(T) = 0{,}083$.

3) a) Sachant qu'un athlète présente un test positif, quelle est la probabilité qu'il soit dopé ?

b) Le laboratoire décide de commercialiser le test si la probabilité de l'évènement « un athlète présentant un test positif est dopé » est supérieure ou égale à 0,95.
Le test proposé par le laboratoire sera-t-il commercialisé ? Justifier.

Partie B

Dans une compétition sportive, on admet que la probabilité qu'un athlète contrôlé présente un test positif est 0,103.

1) Dans cette question **1.** on suppose que les organisateurs décident de contrôler 5 athlètes au hasard parmi les athlètes de cette compétition.
On note X la variable aléatoire égale au nombre d'athlètes présentant un test positif parmi les 5 athlètes contrôlés.

a) Donner la loi suivie par la variable aléatoire X. Préciser ses paramètres.

b) Calculer l'espérance $E(X)$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

c) Quelle est la probabilité qu'au moins un des 5 athlètes contrôlés présente un test positif ?

2) Combien d'athlètes faut-il contrôler au minimum pour que la probabilité de l'évènement « au moins un athlète contrôlé présente un test positif » soit supérieure ou égale à 0,75 ? Justifier.

♦ BIN.21 (EDS Asie Juin 2021)

Un sac contient les huit lettres suivantes : A B C D E F G H (2 voyelles et 6 consonnes).

Un jeu consiste à tirer simultanément au hasard deux lettres dans ce sac.

On gagne si le tirage est constitué d'une voyelle **et** d'une consonne.

1) Un joueur extrait simultanément deux lettres du sac.

a) Déterminer le nombre de tirages possibles.

b) Déterminer la probabilité que le joueur gagne à ce jeu.

Les questions 2 et 3 de cet exercice sont indépendantes.

Pour la suite de l'exercice, on admet que la probabilité que le joueur gagne est égale à $\frac{3}{7}$.

2) Pour jouer, le joueur doit payer k euros, k désignant un entier naturel non nul.
Si le joueur gagne, il remporte la somme de 10 euros, sinon il ne remporte rien.
On note G la variable aléatoire égale au gain algébrique d'un joueur (c'est-à-dire la somme remportée à laquelle on soustrait la somme payée).

a) Déterminer la loi de probabilité de G.

b) Quelle doit être la valeur maximale de la somme payée au départ pour que le jeu reste favorable au joueur ?

3) Dix joueurs font chacun une partie. Les lettres tirées sont remises dans le sac après chaque partie.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de joueurs gagnants.

a) Justifier que X suit une loi binomiale et donner ses paramètres.

b) Calculer la probabilité, arrondie à 10^{-3}, qu'il y ait exactement quatre joueurs gagnants.

c) Calculer $\mathbf{P}(X \geqslant 5)$ en arrondissant à 10^{-3}. Donner une interprétation du résultat obtenu.

d) Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $\mathbf{P}(X \leqslant n) \geqslant 0{,}9$.

♦ BIN.22 (11 Mai 2022, Métropole)

Le directeur d'une grande entreprise a proposé à l'ensemble de ses salariés un stage de formation à l'utilisation d'un nouveau logiciel.

Ce stage a été suivi par 25 % des salariés.

1) Dans cette entreprise, 52 % des salariés sont des femmes, parmi lesquelles 40 % ont suivi le stage.
On interroge au hasard un salarié de l'entreprise et on considère les évènements :

- F : « le salarié interrogé est une femme »,
- S : « le salarié interrogé a suivi le stage ».

$\overline{F}$ et $\overline{S}$ désignent respectivement les évènements contraires des évènements F et S.

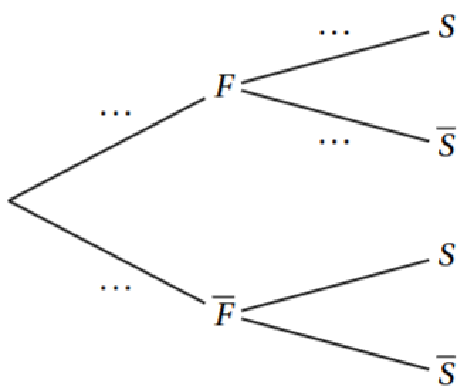
1) Donner la probabilité de l'évènement S.

2) Recopier et compléter les pointillés de l'arbre pondéré ci-dessous sur les quatre branches indiquées.

3) Démontrer que la probabilité que la personne interrogée soit une femme ayant suivi le stage est égale à 0,208.

4) On sait que la personne interrogée a suivi le stage. Quelle est la probabilité que ce soit une femme ?

5) Le directeur affirme que, parmi les hommes salariés de l'entreprise, moins de 10 % ont suivi le stage.
Justifier l'affirmation du directeur.



6) On note X la variable aléatoire qui à un échantillon de 20 salariés de cette entreprise choisis au hasard associe le nombre de salariés de cet échantillon ayant suivi le stage. On suppose que l'effectif des salariés de l'entreprise est suffisamment important pour assimiler ce choix à un tirage avec remise.

a) Déterminer, en justifiant, la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X.

b) Déterminer, à 10^{-3} près, la probabilité que 5 salariés dans un échantillon de 20 aient suivi le stage.

c) Le programme ci-dessous, écrit en langage Python, utilise la fonction **binomiale**(i,n,p) créée pour l'occasion qui renvoie la valeur de la probabilité $P(X = i)$ dans le cas où la variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres n et p.

```
def proba(k) :
    P=0
    for i in range(0,k+1) :
        P=P+binomiale(i,20,0.25)
    return P
```

Déterminer, à 10^{-3} près, la valeur renvoyée par ce programme lorsque l'on saisit proba(5) dans la console Python.

Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

d) Déterminer, à 10^{-3} près, la probabilité qu'au moins 6 salariés dans un échantillon de 20 aient suivi le stage.

7) Cette question est indépendante des questions 1 et 2.

Pour inciter les salariés à suivre le stage, l'entreprise avait décidé d'augmenter les salaires des salariés ayant suivi le stage de 5 %, contre 2 % d'augmentation pour les salariés n'ayant pas suivi le stage.

Quel est le pourcentage moyen d'augmentation des salaires de cette entreprise dans ces conditions ?