Fiche 16 | Loi Binomiale

1 Épreuve de Bernoulli

Définition 1 (Épreuve de Bernoulli) — Une **épreuve de Bernoulli** est une expérience aléatoire n'admettant que deux issues : un Succès (S) et un Échec ($\overline{S}$).
On note en général p la probabilité de Succès et $q = 1 - p$ la probabilité d'un échec.

2 Variable aléatoire de Bernoulli

Définition 2 (Variable aléatoire de Bernoulli) — Une variable aléatoire X est une **variable aléatoire de Bernoulli** si elle est à valeur dans $\{0; 1\}$ où 1 est la valeur attribuée au Succès.
On note $p = \mathbf{P}(X = 1)$, p est alors le **paramètre** de la **loi de Bernoulli** que suit X :

x_i	0	1
$\mathbf{P}(X = x_i)$	$1-p$	p

3 Loi Binomiale

Une variable aléatoire X suit une loi binomiale si elle compte le nombre de succès dans la répétions de n épreuves de Bernoulli, indépendantes et de même paramètre p. On note dans ce cas :

$$X \sim \mathcal{B}(n; p).$$

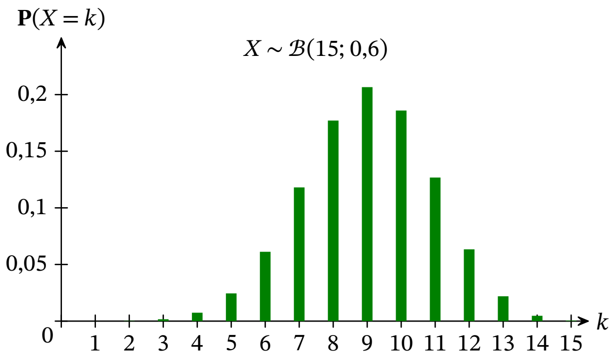
Et :

$$\forall k \in \{0, 1, ..., n\}, \quad \mathbf{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

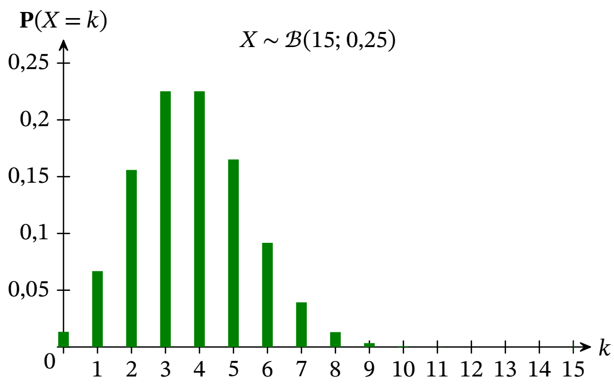
En particulier :

- $\mathbf{P}(X = n) = p^n$ (on a n succès, donc que des succès),
- $\mathbf{P}(X = 0) = (1-p)^n$ (on a n échecs, donc que des échecs).

Voici par exemple les valeurs prises par $\mathbf{P}(X = k)$ quand $n = 15$ et $p = 0{,}6$ (k en abscisse).



Un autre exemple : les valeurs prises par $\mathbf{P}(X = k)$ quand $n = 15$ et $p = 0{,}25$ (k en abscisse).



On constate que les valeurs prises forment une "cloche" donc le pic est autour de la valeur $n \times p$: c'est normal, il s'agit de l'espérance de X !

Proposition 16.1 (Espérance, variance, écart-type de la loi binomiale) — *Soit X une variable aléatoire suivant une loi $\mathcal{B}(n,p)$. Alors :*

- $\mathbf{E}(X) = np$;
- $\mathbf{V}(X) = np(1-p)$;
- $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$.

4 Un sujet de BAC : Amérique du Nord 2021

Remarque 1 Vérifier dans le sujet la précision demandée pour les probabilités recherchées : 10^{-2}, 10^{-3} près...

♦ **LB.1** (**EDS Amérique du nord 2021**)

Dans une compétition sportive, on admet que la probabilité qu'un athlète contrôlé présente un test positif est 0,103.

1) Dans cette question **1.** on suppose que les organisateurs décident de contrôler 5 athlètes au hasard parmi les athlètes de cette compétition.
On note X la variable aléatoire égale au nombre d'athlètes présentant un test positif parmi les 5 athlètes contrôlés.

a) Donner la loi suivie par la variable aléatoire X. Préciser ses paramètres.

☞ **Correction exercice 1 :** Archi-classique ! Le fait qu'un athlète présente un test positif peut être assimilé à une **épreuve de Bernoulli** de paramètre $p = 0{,}103$.

Ainsi, X **compte le nombre de succès dans la répétition** de $n = 5$ de ces épreuves de Bernoulli, **indépendantes** et **de même paramètre** $p = 0{,}103$.

Donc X suit une loi Binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0{,}103$.

b) Calculer l'espérance $\mathbf{E}(X)$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

☞ **Correction exercice 1 :** On utilise la formule du cours :

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(X) &= np\\ &= 5\times 0{,}103\\ &= 0{,}515\end{aligned}$$

Interprétation : en moyenne sur un grand nombre de contrôles, il y aura 0,515 test positif sur les 5 tests des athlètes, soit environ 1 test positif sur 10 .

c) Quelle est la probabilité qu'au moins un des 5 athlètes contrôlés présente un test positif ?

☞ **Correction exercice 1 :** Encore archi-classique : il suffit d'utiliser le fait que l'évènement contraire de $[X \geqslant 1]$ est $[X < 1]$, or comme X ne prend que des valeurs entières, cela revient à $[X = 0]$. Ainsi :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X \geqslant 1) &= 1 - \mathbf{P}(X < 1)\\ &= 1 - \mathbf{P}(X = 0)\\ &= 1 - (1 - 0{,}103)^5\\ &= 1 - 0{,}897^n\\ &\approx 0{,}419\end{aligned}$$

Donc la probabilité qu'au moins un des 5 athlètes contrôlés présente un test positif est d'environ 0,419 à 10^{-3} près.

2) Combien d'athlètes faut-il contrôler au minimum pour que la probabilité de l'évènement « au moins un athlète contrôlé présente un test positif » soit supérieure ou égale à 0,75 ? Justifier.

☞ **Correction exercice 1 :** La probabilité qu'aucun athlète contrôlé n'ait de test positif est $(1-0{,}103)^n = 0{,}897^n$. Donc on cherche n tel que :

$$\begin{aligned}1 - 0{,}897^n &\geqslant 0{,}75\\ 0{,}897^n &\leqslant 0{,}25\end{aligned}$$

Remarquez que $-1 < 0{,}897 < 1$ donc d'après le cours sur les suites,

$$\lim_{n\to+\infty} 0{,}897^n = 0.$$

De plus, la suite de terme général $0{,}897^n$ est géométrique et strictement décroissante, cela nous indique :

- qu'il existe une valeur de n telle que $0{,}897^n \leqslant 0{,}25$ d'après la définition de la convergence vers 0 avec $\epsilon = 0{,}25$;
- que la première valeur de n telle que $0{,}897^n \leqslant 0{,}25$ conviendra car toutes les valeurs suivantes vérifieront aussi cette inégalité, par décroissance de la suite.

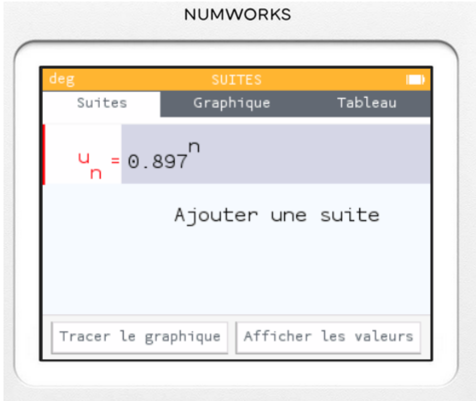
Ici, trois façons de faire (rien que ça !) pour déterminer la valeur recherchée :

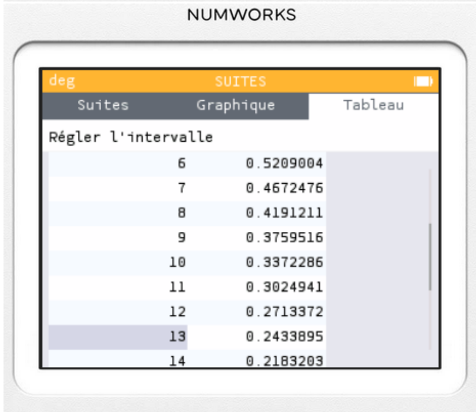
- **Première façon :** on écrit un petit programme Python pour trouver la réponse :

```python
def seuil():
    n=0
    while 0.897**n>0.25:
        n=n+1
    return n
```

```
>>> seuil()
13
>>> |
```

- **Deuxième façon :** on regarde directement la réponse en regardant les valeurs de la suite à la calculatrice :





- **Troisième façon :** si on a vu la fonction ln, on peut résoudre directement l'inéquation :

$$\begin{aligned}0{,}897^n &\leqslant 0{,}25\\ \ln(0{,}897^n) &\leqslant \ln(0{,}25)\\ n\ln(0{,}897) &\leqslant \ln(0{,}25)\\ n &\geqslant \frac{\ln(0{,}25)}{\ln(0{,}897)}\\ n &\geqslant 12{,}75\ldots\\ n &\geqslant 13\end{aligned}$$

  Attention au fait que $0{,}897 < 1$ donc $\ln(0{,}897) < 0$, ce qui inverse l'inégalité !

Dans tous les cas, on obtient la valeur $n = 13$: il faut contrôler au minimum 13 athlètes pour que la probabilité qu'au moins un athlète présente un test positif soit supérieure à 0,75.