Fiche 17 | Produit scalaire

On commence avec les principaux rappels du cours :

1 Calculs de produits scalaires dans l'espace

Proposition 17.1 (Calculs de produits scalaires) — *Si $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ sont deux vecteurs de l'espace (avec leurs coordonnées exprimées dans une base orthonormée), alors :*

- $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' + zz'$;
- $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \cos(\vec{u};\vec{v})$;
- $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$;
- $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$;
- $\vec{u}.\vec{v} = \dfrac{\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2}{4}$.

Remarque 1 La deuxième formule permet souvent en pratique de calculer l'angle (en valeur absolue) entre deux vecteurs de l'espace.

2 Vecteurs orthogonaux

Définition 1 (Vecteurs orthogonaux) — On dit que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux** si leur produit scalaire est nul.

3 Calculs de longueurs

Définition 2 (Norme d'un vecteur) — Dans l'espace : $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}.\vec{u}}$.

☞ **Exemple 1 (Calcul de la distance AB où $A(3;1;2)$ et $B(0;-1/2;4)$.)** On calcule les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$: $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0-3\\-1/2-1\\4-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\-3/2\\2\end{pmatrix}$, donc :

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(-3)^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + 2^2} \\ &= \sqrt{9 + \frac{9}{4} + 4} \\ &= \sqrt{\frac{61}{4}} \\ &= \frac{\sqrt{61}}{2} \end{aligned}$$

4 Droite/droite

Méthode 17.1

Comment montrer que deux droites sont orthogonales ?

On peut calculer le produit scalaire de leurs vecteurs directeurs et montrer qu'il est nul :

☞ **Exemple 2** Si d a pour vecteur directeur $\vec{u} = \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ et d' a pour vecteur directeur $\vec{v} = \begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix}$, alors :

$$\begin{aligned} \vec{u}.\vec{v} &= 1\times(-1) + 2\times 0 + (-1)\times(-1) \\ &= -1+1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux donc d et d' sont orthogonales.

Remarque 2 Deux droites de l'espace orthogonales peuvent être sécantes ou non.

5 Orthogonalité et plan

On reprend les points fondamentaux du cours :

Définition 3 (Propriété - définition, vecteur normal à un plan) — Si $\mathcal{B} = (\vec{u};\vec{v})$ est une base d'un plan $\mathcal{P}$, un vecteur $\vec{n}$ **non nul et orthogonal** à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$ est dit vecteur normal au plan.

Méthode 17.2

Comment montrer qu'un vecteur est normal à un plan ?

☞ **Exemple 3 (Soit $A(0;1;1)$, $B(-3;5;0)$ et $C(1;1;2)$. Montrer que $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}$ est normal au plan (ABC).)**

On commence par vérifier que A, B et C ne sont pas alignés :

- $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\4\\-1\end{pmatrix}$
- $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

On a les coordonnées 0 ; 4 et −3 et 1 qui nous indiquent que ces vecteurs ne sont pas colinéaires : donc A, B et C ne sont pas alignés et forment bien un plan. De plus :

- $\vec{n}.\overrightarrow{AB} = -6+4+2 = 0$
- $\vec{n}.\overrightarrow{AC} = 2-2 = 0$

$\vec{n}$ est donc normal à la base $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$ du plan (ABC), donc $\vec{n}$ est normal au plan (ABC).

Proposition 17.2 (Équation cartésienne d'un plan de l'espace) — *On considère un plan $\mathcal{P}$, un vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ normal à ce plan et $A(x_A;y_A;z_A)$ un point de $\mathcal{P}$.*
Alors $\mathcal{P}$ admet pour équation cartésienne :

$$ax+by+cz+d=0$$

où d est une constante qui vaut $d=-ax_A-by_A-cz_A$.

Méthode 17.3

Comment déterminer l'équation cartésienne d'un plan ?

☞ **Exemple 4 (Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ ayant pour vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$ et passant par le point $C(-1;0;0)$.)**

Comme $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$ est normal à $\mathcal{P}$, une équation cartésienne de $\mathcal{P}$ est :

$$x+y-2z+d=0$$

où $d\in\mathbf{R}$. Pour déterminer d, on utilise le fait que $C\in\mathcal{P}$, donc on doit avoir :

$$\begin{aligned}-1+0-2\times 0+d&=0\\ d&=1\end{aligned}$$

Donc une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ est $x+y-2z+1=0$.

Remarque 3 Les équations cartésiennes de plan sont toujours définies à un coefficient multiplicateur près, en effet tous les vecteurs colinéaires à $\vec{n}$ sont normaux à $\mathcal{P}$! Ici par exemple, on aurait aussi pu prendre $\vec{n'}\begin{pmatrix}5\\5\\-10\end{pmatrix}$ comme vecteur normal à $\mathcal{P}$. Cela aurait bien sûr changé la valeur de d, mais pas le fait que l'équation représente le même plan.

Méthode 17.4

Comment déterminer si un point appartient à un plan ?

☞ **Exemple 5 (Le point $B(0;2;2)$ appartient-il au plan $\mathcal{P}$ d'équation $x+y-2z+1=0$?)** On remplace x, y et z par les coordonnées de B :

$$\begin{aligned}0+2-2\times 2+1&=-1\\ &\neq 0\end{aligned}$$

Donc le point B n'appartient pas au plan $\mathcal{P}$, car ses coordonnées ne vérifient pas l'équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$.

Méthode 17.5

Comment montrer qu'un plan est orthogonal à une droite ?

On peut montrer qu'un vecteur normal à ce plan est colinéaire à un vecteur directeur de la droite.

☞ **Exemple 6 (Le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x+y-2z+1=0$ et la droite d de vecteur directeur $\vec{u}=\begin{pmatrix}-2\\-2\\4\end{pmatrix}$ et passant par $A(0;5;4)$ sont-ils orthogonaux ?)**

D'après la proposition, un vecteur normal au plan est $\vec{n}=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{u}=-2\vec{n}$.
Ainsi, $\vec{n}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires donc la droite d est orthogonale à ce plan.

Remarque 4 Le fait que d passe par A ou un autre point n'a aucune importance pour répondre à cette question.

Remarque 5 On peut en conclure que le plan et la droite ont un unique point en commun.

6 Droite/plan

Méthode 17.6

Comment déterminer l'intersection d'une droite et d'un plan à l'aide des équations de chacun ?

☞ **Exemple 7 (Intersection de d et $\mathcal{P}$ définis précédemment ?)** On reprend l'exemple précédent. Nous connaissons déjà une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$, déterminons une représentation paramétrique de la droite d :

$$M(x,y,z)\in d \iff \exists t\in\mathbf{R},\quad \begin{cases}x=0-2t\\ y=5-2t\\ z=4+4t\end{cases}$$

Maintenant, le point d'intersection de d et du plan $\mathcal{P}$ vérifie à la fois l'équation cartésienne du plan, et cette représentation paramétrique. On doit donc avoir :

$$M(x,y,z) \in d \cap \mathcal{P} \iff \exists t \in \mathbf{R}, \quad \begin{cases} x = 0 - 2t \\ y = 5 - 2t \\ z = 4 + 4t \\ x + y - 2z + 1 = 0 \end{cases}$$

On doit donc avoir :

$$\begin{aligned} (-2t) + (5 - 2t) - 2(4 + 4t) + 1 &= 0 \\ -12t - 2 &= 0 \\ t &= -1/6 \end{aligned}$$

On remplace maintenant t par $-1/6$ dans les coordonnées x, y et z :

$$\begin{aligned} x &= 1/3 \\ y &= 16/3 \\ z &= 10/3 \end{aligned}$$

Donc le point d'intersection de d et $\mathcal{P}$ a pour coordonnées $\left(\frac{1}{3}; \frac{16}{3}; \frac{10}{3}\right)$.

Remarque 6 Si d et $\mathcal{P}$ sont orthogonaux, le cours affirme qu'il n'y a qu'un point d'intersection. Mais il peut exister un unique point d'intersection même si d et $\mathcal{P}$ ne sont pas orthogonaux, dans ce cas l'exemple ci-dessus est encore pertinent. Par contre, si d est parallèle au plan (incluse ou strictement parallèle), on procède en général autrement, voire l'exemple suivant.

Méthode 17.7

Comment montrer qu'une droite est parallèle à un plan ?

On peut montrer qu'un vecteur directeur de cette droite est orthogonal à un vecteur normal au plan :

☞ **Exemple 8** Si d est définie de façon paramétrique par :

$$M(x,y,z) \in d \iff \exists t \in \mathbf{R}, \quad \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 5 + 6t \\ z = 4t + 1 \end{cases}$$

et $\mathcal{P}$ est un plan d'équation $2x + z = 0$, alors :

- un vecteur directeur de d est $\vec{u}\begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$
- un vecteur normal à $\mathcal{P}$ est $\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
- $\vec{u}.\vec{n} = -2 \times 2 + 6 \times 0 + 4 \times 1 = 0$

Donc $\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux : d et $\mathcal{P}$ sont donc parallèles. Pour savoir si d est incluse dans $\mathcal{P}$ ou si elle est strictement parallèle à $\mathcal{P}$, on regarde si un point de d appartient à $\mathcal{P}$, par exemple (en prenant $t = 0$) $M(1;5;1) \in d$ et

$$\begin{aligned} 2 \times 1 + 1 &= 3 \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

Donc $M \notin \mathcal{P}$: ainsi d est strictement parallèle à $\mathcal{P}$.

7 Calcul de projeté orthogonal

Il suffit de visualiser géométriquement la démarche :

☞ **Exemple 9 (Déterminer le projeté orthogonal de $M(3;-1;0)$ sur le plan $\mathcal{P}$ d'équation $2x - y + z = 0$.)** Pour cela, on détermine une représentation paramétrique de la droite d, orthogonale $\mathcal{P}$ passant par M : un vecteur directeur de d est un vecteur normal à $\mathcal{P}$, donc par exemple $\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Une représentation paramétrique de d est donc :

$$M(x,y,z) \in d \iff \exists t \in \mathbf{R}, \quad \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -1 - t \\ z = t \end{cases}$$

et on cherche le point d'intersection de cette droite avec $\mathcal{P}$: c'est précisément le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{P}$. On résout donc :

$$M(x,y,z) \in d \cap \mathcal{P} \iff \exists t \in \mathbf{R}, \quad \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -1 - t \\ z = t \\ 2x - y + z = 0 \end{cases}$$

C'est une méthode déjà vue : on obtient $\left(\frac{4}{3}; \frac{11}{6}; -\frac{5}{6}\right)$.

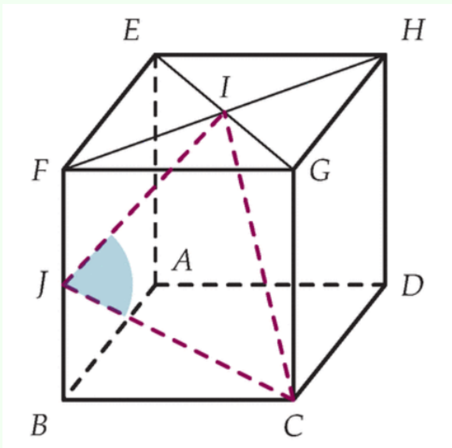
8 Calcul d'angle

Méthode 17.8

Comment calculer une valeur approchée d'un angle entre deux vecteurs (ou deux droites sécantes) de l'espace ?

Beaucoup de façon de faire différente, qui dépendent du contexte... Mais souvent, l'idée est de calculer le produit scalaire de deux façons différentes pour en déduire la valeur du cosinus de l'angle cherché. Voyons un exemple :

☞ **Exemple 10** On considère un cube $ABCDEFGH$ de côté 1. Soit I le centre de la face $EFGH$ et J le milieu de l'arête $[BF]$. Le but ici est de calculer au degré près l'angle $\widehat{IJC}$.



Première façon : on se place dans un repère orthonormé, par exemple le repère $\left(B;\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BF}\right)$. Dans ce repère, $\overrightarrow{JI}\begin{pmatrix}1/2\\1/2\\1/2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{JC}\begin{pmatrix}1\\0\\-1/2\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{JI}.\overrightarrow{JC}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$. De plus $\|\overrightarrow{JI}\|=\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\|\overrightarrow{JC}\|=\frac{\sqrt{5}}{2}$ or :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{JI}.\overrightarrow{JC}&=\|\overrightarrow{JI}\|\times\|\overrightarrow{JC}\|\times\cos\left(\overrightarrow{JI};\overrightarrow{JC}\right)\\ \cos\left(\overrightarrow{JI};\overrightarrow{JC}\right)&=\frac{\overrightarrow{JI}.\overrightarrow{JC}}{\|\overrightarrow{JI}\|\times\|\overrightarrow{JC}\|}\\ &=\frac{1}{\sqrt{15}}\end{aligned}$$

À l'aide de la calculatrice, (touche accos) on en déduit que $\widehat{IJC}\approx 75°$. La fonction arccos sera peut-être présentée en tribulation cette année.

Deuxième façon : on calcule le produit scalaire à l'aide des normes.

Cela ressemble à la première méthode sauf qu'il faut aussi calculer $\|\overrightarrow{IC}\|=\frac{\sqrt{6}}{2}$. On a ainsi :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{JI}.\overrightarrow{JC}&=\frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{JI}\|^2+\|\overrightarrow{JC}\|^2-\|\underbrace{\overrightarrow{JI}-\overrightarrow{JC}}_{=\overrightarrow{CI}}\|^2\right)\\ &=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}+\frac{5}{4}-\frac{6}{4}\right)\\ &=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

On conclut comme dans la première méthode.

Troisième façon : on décompose le produit scalaire astucieusement.

On utilise la distributivité du produit scalaire pour écrire :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{JI}.\overrightarrow{JC}&=\left(\underbrace{\overrightarrow{JF}+\frac{1}{2}\overrightarrow{FG}+\frac{1}{2}\overrightarrow{FE}}_{=\overrightarrow{JI}}\right).\left(\overrightarrow{JB}+\overrightarrow{BC}\right)\\ &=\underbrace{\overrightarrow{JF}.\overrightarrow{JB}}_{=-\|\overrightarrow{JF}\|^2}+\frac{1}{2}\underbrace{\overrightarrow{FG}.\overrightarrow{JB}}_{=0}+\frac{1}{2}\underbrace{\overrightarrow{FE}.\overrightarrow{JB}}_{=0}+\underbrace{\overrightarrow{JF}.\overrightarrow{BC}}_{=0}+\underbrace{\frac{1}{2}\overrightarrow{FG}.\overrightarrow{BC}}_{=\frac{1}{2}\times\|\overrightarrow{FG}\|^2}+\frac{1}{2}\underbrace{\overrightarrow{FE}.\overrightarrow{BC}}_{=0}\\ &=-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\\ &=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

Et on conclut comme dans la première méthode.