Chapitre 3 | Suites

Il est plus intelligent d'allumer une toute petite lampe, que de se plaindre de l'obscurité.
Lao Tseu (VI[e] siècle avant J.C).

Les intérêts composés sont la plus grande force de l'univers.
Albert Einstein (1879-1955).

☞ **Exercices 1,2,10 et 11 page 11.**

☞ **Exercices 3,4,14,15 et 16 page 11.**

I Suites géométriques

1.1 *Définition*

Définition 1 (Suite géométrique) — On dit qu'une suite u est **géométrique** s'il existe un réel q (appelé la **raison** de la suite) tel que pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = qu_n.$$

☞ **Exemple 1** Sur un compte en banque, il se trouve 2 000 euros en banque au premier janvier 2020. Chaque année, au premier janvier, les intérêts rapportent 3% du capital présent sur le compte au premier janvier précédent. Comment peut-on modéliser ce qu'il y aura sur le compte si on ne retire jamais d'argent de ce compte ?

☞ **Exercices 21 et 22 page 29.**

1.2 *Formule explicite*

Proposition 3.1 — *Pour calculer facilement les termes d'une suite géométrique, on peut utiliser la formule suivante, vraie pour tout entier naturel n :*

$$u_n = u_0 \times q^n$$

ou :

$$u_n = u_1 \times q^{n-1}.$$

☞ **Exemple 2** On reprend l'exemple précédent. Combien y aura-t-il sur le compte au premier janvier 2025 si on ne retire jamais d'argent de ce compte ?

☞ **Exercices 26, 27 page 30.**

☞ **Exercices 42, 43 page 31 (sauf question f. du 43).**

1.3 *Moyenne géométrique de deux nombres*

Définition 2 (moyenne géométrique) — Si a et b sont deux nombres positifs, la **moyenne géométrique** de a et b est le nombre $\sqrt{ab}$.

☞ **Exemple 3** Calculer la moyenne géométrique de 2 et 8, puis celle de 10 et 100.

Proposition 3.2 — *Si u est une suite géométrique positive, alors pour tout entier naturel n non nul, la moyenne géométrique de u_{n-1} et u_{n+1} est égale à u_n.*

1.4 *Somme des termes d'une suite géométrique*

Proposition 3.3 (Somme des termes d'une suite géométrique) — *La somme des n premiers termes d'une suite géométrique de raison $q \neq 1$ est égale à :*

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1} = u_0 \frac{1-q^n}{1-q}.$$

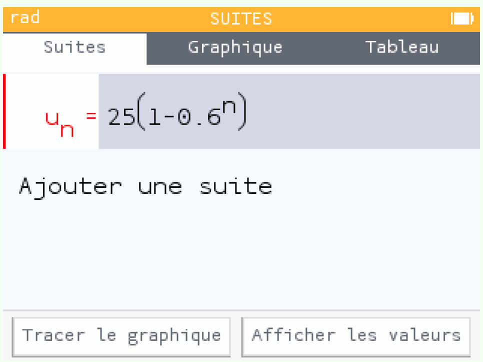
On a aussi :

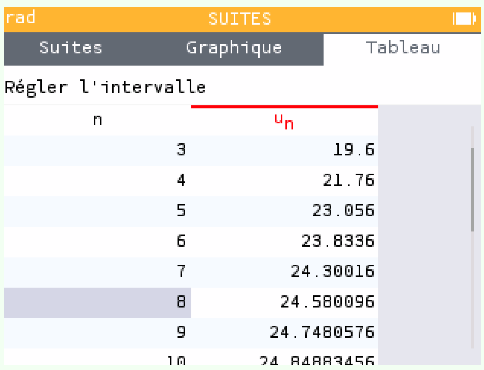
$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n = u_1 \frac{1-q^n}{1-q}.$$

et :

$$u_p + u_{p+1} + \ldots + u_n = u_p \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}.$$

☞ **Exemple 4** Un forage a lieu pour créer un puits de pétrole. Le premier jour, on creuse à 10 mètres sous la surface. Le deuxième jour, la terre étant de plus en plus dure, on creuse 6 mètres supplémentaires. Chaque jour, on creuse 60% de moins que le jour précédent. Le pétrole est à 24,5 mètres sous terre.
Pourra-t-on l'atteindre ? Si oui, quel jour ?





II Suites arithmétiques

☞ **Activité 1 page 12.**

2.1 *Définition*

Définition 3 (Suite arithmétique) — Une suite (u_n) est dite **arithmétique** s'il existe un nombre réel r tel que pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = u_n + r.$$

r est dans ce cas appelé la **raison** de la suite arithmétique.

☞ **Exemple 5** Un constructeur industriel de voitures a été condamné le 15 juillet à une amende de 120 000 euros, avec 15 000 euros de plus par jour de retard. Comment peut-on modéliser le montant de l'amende à régler en fonction du jour où celle-ci est payée ?

☞ **Exercices 1 à 4 page 28.**

2.2 *Formule explicite d'une suite arithmétique*

Proposition 3.4 (Formule explicite, suite arithmétique) — *Une suite (u_n) est dite* ***arithmétique*** *de raison r et de premier terme u_0.*
Alors, pour tout entier naturel n :

$$u_n = u_0 + nr.$$

☞ **Exemple 6** Si le constructeur paie l'amende le 27 juillet, combien va-t-il payer ?

☞ **Exercices 7 et 8 page 28.**

2.3 *Moyenne arithmétique de deux nombres*

Définition 4 (Moyenne arithmétique de deux nombres) — Soient a et b deux nombres. On appelle **moyenne arithmétique** de ces deux nombres, la valeur :

$$m = \frac{a+b}{2}.$$

2.4 *Somme des termes d'une suite arithmétique*

Proposition 3.5 (Somme des termes d'une suite arithmétique) — *La somme des n premiers termes d'une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0 est égale à :*

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1} = n \times \frac{u_0 + u_{n-1}}{2}.$$

On a aussi :

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n = n \times \frac{u_1 + u_n}{2}.$$

et :

$$u_p + u_{p+1} + \ldots + u_{p+n-1} = n \times \frac{u_p + u_{p+n-1}}{2}.$$