Chapitre 6 Produit scalaire dans l'espace

Wir müssen wissen, wir werden wissen.

Épitaphe de David Hilbert (1862-1943).

I Produit scalaire dans l'espace

6.1.1 Définition

Comme pour le plan l'an dernier, on peut définir le produit scalaire dans l'espace de plusieurs façons équivalentes, mais la définition suivante a l'avantage de se généraliser aux dimensions supérieures, quand certains étudieront les *Espaces de Hilbert* (réels... Certains d'entre-vous étudieront la version complexe plus tard).

Définition 1 (Produit scalaire) — Si $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ sont des vecteurs de $\mathbf{R}^3$ (où les coordonnées sont données dans une base orthonormée de $\mathbf{R}^3$), alors on définit le **produit scalaire** $\vec{u}.\vec{v}$ par :

$$\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' + zz'.$$

6.1.2 Première propriétés

Proposition 9.1 — *Soit $\lambda \in \mathbf{R}$, $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de $\mathbf{R}^3$.*
Le produit scalaire est :

- ***symétrique*** *:* $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$;
- ***linéaire à droite*** *:* $(\lambda\vec{u} + \vec{v}).\vec{w} = \lambda\vec{u}.\vec{w} + \vec{v}.\vec{w}$;
- ***linéaire à gauche*** *:* $\vec{u}.(\lambda\vec{v} + \vec{w}) = \lambda\vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$.

Un petit rappel avant d'attaquer la suite :

Définition 2 (Norme euclidienne) — On a pour tout vecteur $\vec{u}$: $\vec{u}.\vec{u} = \|\vec{u}\|^2$.

6.1.3 Bases, repères orthonormés

Définition 3 (Base orthonormée) — Soit $(\vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k})$ une base de l'espace $\mathbf{R}^3$. On dit que cette base est **orthonormée** si :

$$\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = \|\vec{k}\| = 1 \qquad \text{et} \qquad \vec{\imath}.\vec{\jmath} = \vec{\imath}.\vec{k} = \vec{\jmath}.\vec{k} = 0.$$

Définition 4 (Repère orthonormé) — Un **repère orthonormé** de l'espace $(O, \vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k})$ est la donnée d'un point (O) et d'une base orthonormée $(\vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k})$.

6.1.4 Normes

Toutes les coordonnées sont entendues dans un repère orthonormé.

Proposition 9.2 (Norme d'un vecteur de $\mathbf{R}^3$) — *Si $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ est un vecteur de $\mathbf{R}^3$, alors sa norme est donnée par :*

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Proposition 9.3 — *Si $\lambda \in \mathbf{R}$ et $\vec{u}$ est un vecteur de $\mathbf{R}^3$, alors $\|\lambda\vec{u}\| = |\lambda| \times \|\vec{u}\|$.*

Proposition 9.4 (Norme de AB) — *Si $A(x_A;y_A;z_A)$ et $B(x_B;y_B;z_B)$ sont deux points de l'espace, alors on a :*

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}.$$

Proposition 9.5 — *On a :*

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2+2\vec{u}.\vec{v}.$$

Proposition 9.6 (Formules de polarisation) — *On a :*

$$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right);$$

$$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2\right);$$

$$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{4}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right).$$

Remarque 1 Lorsqu'on considère deux vecteurs de l'espace, on peut voir ces deux vecteurs comme faisant partie de la direction d'un même plan ; le plan engendré par ces deux vecteurs et un point quelconque. À ce titre, on définit alors l'angle $(\vec{u};\vec{v})$ comme l'angle entre ces vecteurs, "vus" dans ce plan. On a alors :

Proposition 9.7 (Autre expression du produit scalaire) — *On a $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u};\vec{v})$.*

II Orthogonalité

6.2.1 Caractérisation de l'orthogonalité

On rappelle qu'une droite admet une direction dirigée par un vecteur directeur (non nul par définition) et que la direction (base) d'un plan est donnée par deux vecteurs non colinéaires (formant donc une famille libre).

Définition 5 — Deux vecteurs de l'espace $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux** si et seulement si $\vec{u}.\vec{v} = 0$.

Proposition 9.8 (Angle entre deux vecteurs normaux) — *Deux vecteurs orthogonaux de l'espace forment un angle de $\frac{\pi}{2}$ ou $\frac{-\pi}{2}$ (suivant l'orientation choisie).*

Définition 6 (Orthogonalité, perpendicularité) — On dit que deux droites sont **orthogonales** si tout vecteur directeur de l'une est orthogonal à tout vecteur directeur de l'autre droite. Si de plus ces droites sont sécantes, on dit aussi qu'elles sont **perpendiculaires**.
On dit qu'une droite est **orthogonale** à un plan si tout vecteur directeur de la droite est orthogonal à toute combinaison linéaire des vecteurs d'une base plan.

Proposition 9.9 (CNS d'orthogonalité entre deux droites) — *Deux droites sont orthogonales si et seulement si un vecteur directeur de l'une est orthogonal à un vecteur directeur de l'autre.*

Proposition 9.10 (CNS d'orthogonalité droite/plan) — *Une droite est orthogonale à un plan si et seulement si un vecteur directeur de cette droite est orthogonale aux deux vecteurs d'une base de ce plan.*

6.2.2 Vecteur normal à un plan

Dans toute la suite, on munit l'espace d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k})$.

Définition 7 (Propriété - définition, vecteur normal à un plan) — Si $\mathcal{B} = (\vec{u};\vec{v})$ est une base d'un plan $\mathcal{P}$, un vecteur $\vec{n}$ **non nul et orthogonal** à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$ est dit vecteur normal au plan.

DÉMONSTRATION : Utiliser le produit vectoriel de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ pour construire $\vec{n}$.

Proposition 9.11 (Structure des vecteurs normaux à un plan) — *Si $\mathcal{P}$ est un plan, tous les vecteurs normaux à ce plan sont colinéaires deux à deux.*

Proposition 9.12 (CNS de parallélisme) — *Deux plans sont parallèles si et seulement si un vecteur normal à l'un est colinéaire à un vecteur normal à l'autre.*

Proposition 9.13 — *Une droite est orthogonale à un plan si et seulement si un vecteur directeur de cette droite est colinéaire à un vecteur normal à ce plan.*

6.2.3 Équation cartésienne d'un plan

Proposition 9.14 (Équation cartésienne d'un plan de l'espace) — *On considère un plan $\mathcal{P}$, un vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ normal à ce plan et $A(x_A; y_A; z_A)$ un point de $\mathcal{P}$.*
Alors $\mathcal{P}$ admet pour équation cartésienne :

$$ax + by + cz + d = 0$$

où d est une constante qui vaut $d = -ax_A - by_A - cz_A$.

DÉMONSTRATION : $M \in \mathcal{P}$ ssi $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$

6.2.4 Projeté orthogonal sur un plan

Définition 8 (Projeté orthogonal sur un plan) — Soit $\mathcal{P}$ un plan, $\vec{n}$ un vecteur normal à $\mathcal{P}$ et M un point de l'espace.
On appelle **projeté orthogonal** de M sur $\mathcal{P}$ l'intersection de $\mathcal{P}$ et de la droite passant par M de vecteur directeur $\vec{n}$.

DÉMONSTRATION : La droite n'est pas parallèle au plan !

Proposition 9.15 — *Le projeté orthogonal d'un point M sur un plan $\mathcal{P}$ est le point de $\mathcal{P}$ le plus proche de M.*

Définition 9 (Distance d'un point à un plan) — Soit $\mathcal{P}$ un plan de l'espace et M un point. La **distance** de M à $\mathcal{P}$ est la distance MH où H est le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{P}$.

Proposition 9.16 (Formule de la distance) — *Soit $\mathcal{P}$ un plan d'équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$ et $A(x_A; y_A; z_A)$ un point de l'espace. Si on note $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ un vecteur normal à $\mathcal{P}$ et M un point de $\mathcal{P}$, alors :*

$$d(A,\mathcal{P}) = \frac{|\overrightarrow{AM}.\vec{n}|}{\|\vec{n}\|} = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

6.2.5 Projeté orthogonal sur une droite

Définition 10 (Projeté orthogonal sur une droite) — Soit d une droite de vecteur directeur $\vec{u}$ et M un point de l'espace. On appelle **projeté orthogonal** de M sur d l'intersection du plan passant par M et normal à $\vec{u}$ et de la droite d.

Proposition 9.17 — *Le projeté orthogonal d'un point M sur une droite d est le point de d le plus proche de M.*

Définition 11 (Distance d'un point à une droite) — La **distance** de M à une droite d est la distance MH où H est le projeté orthogonal de M sur d.

III Exercices

♦ **PS.1** Soit $ABCD$ un tétraèdre régulier (toutes ses faces sont des triangles équilatéraux) d'arête a et I le milieu de $[BD]$.
Montrer que $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{3}{4}a^2$.

♦ **PS.2** Déterminer une équation du plan passant par $A\left(\sqrt{2};\sqrt{3};1\right)$ et parallèle au plan $\mathcal{P}$ d'équation $\sqrt{6}x+\sqrt{3}y-\sqrt{3}z+1=0$.

♦ **PS.3** Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation $x-y+z+1=0$, $\mathcal{P}'$ le plan orthogonal à $\vec{n}\begin{pmatrix}-2\\2\\-2\end{pmatrix}$ passant par $M(2;3;0)$.

1) Démontrer que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont parallèles.

2) Démontrer que $M \in \mathcal{P}$.

3) Que peut-on en déduire sur $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$?

♦ **PS.4** La droite définie par la représentation paramétrique suivante est-elle orthogonale au plan d'équation $2x+y-z-4=0$?

$$\begin{cases} x = 2t-3 \\ y = t+4 \\ z = -\frac{1}{2}t \end{cases}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

♦ **PS.5** On se place dans un repère $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$ orthonormé. Dans chaque cas, les trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ forment-ils une base orthonormale de l'espace ?

1) $\vec{u} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix}-2\\6\\-3\end{pmatrix}$, $\vec{v} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix}6\\3\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix}-3\\2\\6\end{pmatrix}$.

2) $\vec{u} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1\\-1+\sqrt{3}\\-1-\sqrt{3}\end{pmatrix}$, $\vec{v} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1-\sqrt{3}\\-1\\-1+\sqrt{3}\end{pmatrix}$ et
$\vec{w} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1+\sqrt{3}\\-1-\sqrt{3}\\-1\end{pmatrix}$.

♦ **PS.6** Quelle est la distance entre deux sommets opposés d'un cube de côté a ?

♦ **PS.7** Dans un pavé droit $ABCDEFGH$, on pose $AB = 3$, $AD = 5$ et $AE = 2$. On note I le centre de la face $EFGH$.

1) Calculer la longueur AC.

2) En déduire GI, IA et GA.

3) Déterminer une mesure de l'angle $\widehat{AGI}$ arrondie au degré près.

♦ **PS.8** Dans un cube $ABCDEFGH$, on place un point M quelconque sur le segment $[AB]$, et on note I le milieu de $[MF]$; ainsi que J celui de $[MC]$.

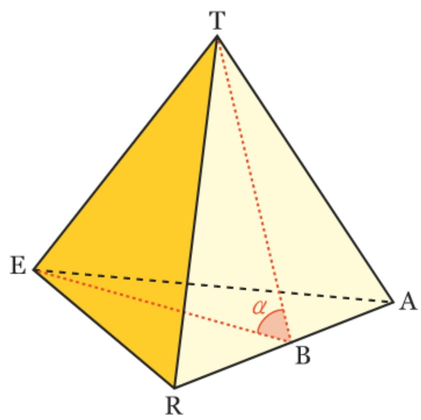
1) Montrer que la droite (IJ) est parallèle à la droite (FC) puis en déduire que (IJ) est parallèle à (ED).

2) En déduire que (IJ) est orthogonale au plan (ABG).

3) En déduire que (IJ) est orthogonale à (BH).

♦ **PS.9** Quelle est la mesure de l'angle formé par deux diagonales d'un cube ? Donner le résultat arrondi au degré près.

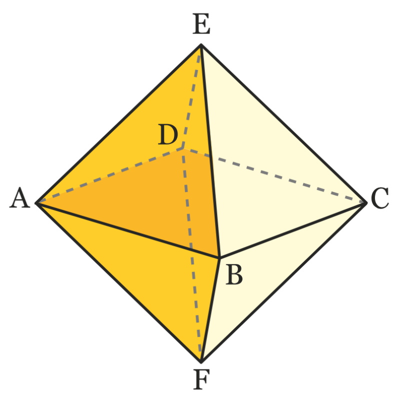
♦ **PS.10** $TERA$ est un tétraèdre régulier de côté a et B est le milieu du segment $[RA]$.



Déterminer la mesure α en degré de l'angle $\widehat{EBT}$.

♦ **PS.11** Montrer que les arêtes opposées d'un tétraèdre régulier sont orthogonales.

♦ **PS.12** $ABCDEF$ est un octaèdre régulier composé de huit faces qui sont des triangles équilatéraux, et les points $ABCD$ sont coplanaires.



1) Montrer que $ABCD$ est un carré (on pourra montrer que ses diagonales sont perpendiculaires et de même longueur).

2) Soit O le centre du carré $ABCD$. Montrer que $O \in (EF)$.

3) Montrer que (EF) est orthogonale à (ABC).

♦ **PS.13** Un tétraèdre trirectangle en A est un tétraèdre dont trois faces sont des triangles rectangles isocèles en A. Soit $RECT$ un tétraèdre trirectangle en R.

1) Peut-on définir un repère orthonormé de l'espace à l'aide de ce tétraèdre ?

2) Montrer que ECT est un triangle équilatéral.

♦ **PS.14** Dans un repère orthonormé de l'espace $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$, on considère les points $A(1;3;5)$, $B(4;1;5)$, $C(2;0;3)$ et $D(-1;2;3)$.

1) Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$. Que peut-on en déduire ?

2) Calculer AC^2+BD^2 et $2AB^2+2AD^2$.

3) Généraliser le résultat précédent à tous les parallélogrammes.

♦ **PS.15** Dans un repère orthonormé de l'espace $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$, donner dans chaque cas les coordonnées d'un vecteur non nul $\vec{n}$ orthogonal aux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ donnés.

1) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}$. **2)** $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$.

♦ **PS.16** Dans un repère orthonormé de l'espace $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$, on définit les points $H(2;2;4)$ et $K(3;1;-3)$.

1) Donner les coordonnées de L, milieu de $[HK]$.

2) Déterminer une équation cartésienne du plan de vecteur normal $\overrightarrow{HK}$ et passant par L.

3) Démontrer que tout point M de ce plan est équidistant de H et K.

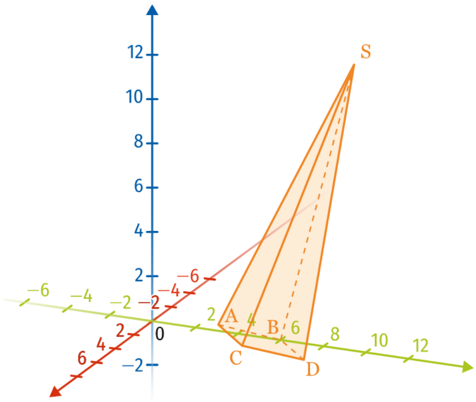
♦ **PS.17** On considère les points $R(1;0;0)$, $I(0;1;0)$, $E(0;0;1)$ et $N(1;1;1)$.

1) Déterminer une équation cartésienne du plan (RIE).

2) Déterminer les coordonnées du point J, projeté orthogonal de N sur (RIE).

3) Montrer que J est le centre de gravité de RIE.

♦ **PS.18** Le volume d'une pyramide est donné par $\mathcal{V}=\frac{1}{3}\mathcal{B}\times h$. Dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$, on considère les points $A(2;4;1)$, $B(0;6;0)$, $C(4;6;1)$, $D(2;8;0)$ et $S(-1;9;12{,}5)$.



1) Justifier que A, B, C et D sont coplanaires.

2) Calculer l'aire du quadrilatère $ABCD$.

3) Montrer que S n'appartient pas au plan (ABC).

4) Calculer le volume de la pyramide $ABCDS$.

♦ **PS.19** Déterminer les intersections éventuelles de la sphère $\mathcal{S}$ de centre $\Omega(2;1;3)$ et de rayon 5 avec la droite d de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x=3t+2 \\ y=2t+3\,, \quad t\in\mathbf{R}. \\ z=2t+1 \end{cases}$$

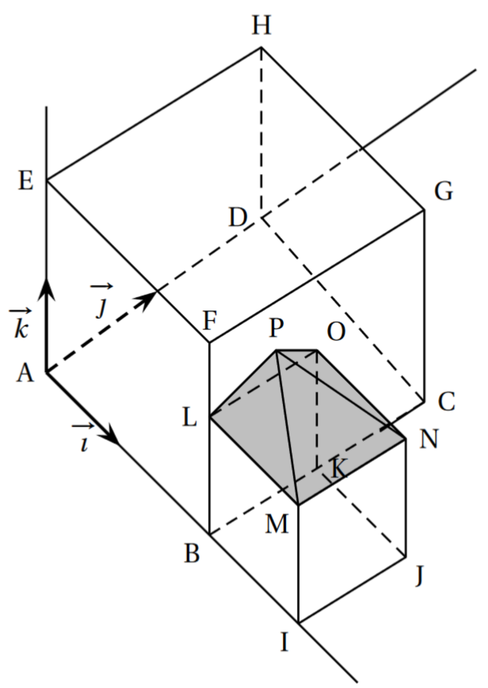
Bacs récents

♦ **PS.20** (**Centres étrangers Groupe 1 Sujet 2 2023**)

La figure ci-dessous correspond à la maquette d'un projet architectural.

Il s'agit d'une maison de forme cubique (ABCDEFGH) accolée Ã un garage de forme cubique (BIJKLMNO) où L est le milieu du segment [BF] et K est le milieu du segment [BC].

Le garage est surmonté d'un toit de forme pyramidale (LMNOP) de base carrée LMNO et de sommet P positionné sur la façade de la maison.



On munit l'espace du repère orthonormé $\left(A ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, avec $\vec{\imath} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, $\vec{\jmath} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ et $\vec{k} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$.

1) a) Par lecture graphique, donner les coordonnées des points H, M et N.

b) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (HM).

2) L'architecte place le point P Ã l'intersection de la droite (HM) et du plan (BCF).

Montrer que les coordonnées de P sont $\left(2 ; \frac{2}{3} ; \frac{4}{3}\right)$.

3) a) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PN}$.

b) Calculer la distance PM.

On admet que la distance PN est égale Ã $\frac{\sqrt{11}}{3}$.

c) Pour satisfaire Ã des contraintes techniques, le toit ne peut être construit que si l'angle $\widehat{MPN}$ ne dépasse pas 55°.

Le toit pourra-t-il être construit ?

4) Justifier que les droites (HM) et (EN) sont sécantes.

Quel est leur point d'intersection ?

♦ **PS.21** (**Polynésie 2023 sujet 2**) L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

On considère :

- le point $A(1 ; -1 ; -1)$;
- le plan $\mathcal{P}_1$, d'équation : $5x + 2y + 4z = 17$;
- le plan $\mathcal{P}_2$ d'équation : $10x + 14y + 3z = 19$;
- la droite $\mathcal{D}$ de représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1+2t \\ y & = & -t \\ z & = & 3-2t \end{array}\right. \quad \text{où } t \text{ décrit } \mathbf{R}.$$

1) Justifier que les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ ne sont pas parallèles.

2) Démontrer que $\mathcal{D}$ est la droite d'intersection de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.

3) a) Vérifier que A n'appartient pas Ã $\mathcal{P}_1$.

b) Justifier que A n'appartient pas Ã $\mathcal{D}$.

4) Pour tout réel t, on note M le point de $\mathcal{D}$ de coordonnées $(1+2t ; -t ; 3-2t)$.

On considère alors la fonction f qui Ã tout réel t associe AM^2, soit $f(t) = AM^2$.

a) Démontrer que pour tout réel t, on a : $f(t) = 9t^2 - 18t + 17$.

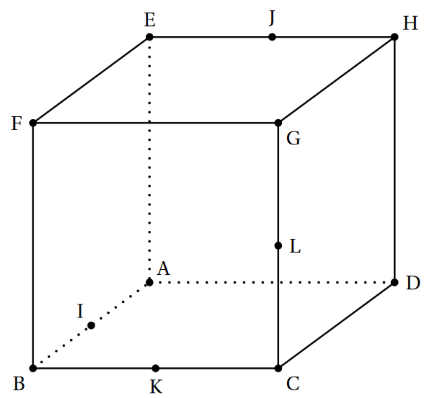
b) Démontrer que la distance AM est minimale lorsque M a pour coordonnées $(3 ; -1 ; 1)$.

5) On note H le point de coordonnées $(3 ; -1 ; 1)$.

Démontrer que la droite (AH) est perpendiculaire Ã $\mathcal{D}$.

Autres

♦ **PS.22** (**D'après Bac S, 2015**) ABCDEFGH est un cube de côté 1.



I est le milieu du segment [AB], J est le milieu du segment [EH], K est le milieu du segment [BC] et L est le milieu du segment [CG].

On munit l'espace du repère $\left(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

1) Graphiquement, tracer la section du cube par le plan (IJK).

2) Justifier que le repère $\left(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$ est orthonormé.

3) a) Démontrer que la droite (FD) est orthogonale au plan (IJK).

b) En déduire une équation cartésienne du plan (IJK).

4) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (FD).

5) Soit M le point d'intersection de la droite (FD) et du plan (IJK). Déterminer les coordonnées du point M.

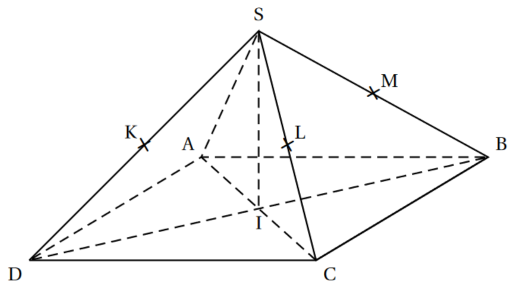
6) Déterminer la nature du triangle IJK et calculer son aire.

7) On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par $\mathcal{V} = \frac{1}{3}\mathcal{B} \times h$, où $\mathcal{B}$ est l'aire d'une base de ce tétraèdre et h la hauteur issue de cette base.
Calculer le volume du tétraèdre FIJK.

8) Les droites (IJ) et (KL) sont-elles sécantes ?

♦ PS.23 (EDS Métropole Mars 2021)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.
Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.



SABCD est une pyramide régulière à base carrée ABCD dont toutes les arêtes ont la même longueur.

Le point I est le centre du carré ABCD.

On suppose que : IC = IB = IS = 1.

Les points K, L et M sont les milieux respectifs des arêtes [SD], [SC] et [SB].

1) Les droites suivantes ne sont pas coplanaires :

a. (DK) et (SD) **b.** (AS) et (IC) **c.** (AC) et (SB) **d.** (LM) et (AD)

Pour les questions suivantes, on se place dans le repère orthonormé de l'espace $\left(I ; \overrightarrow{IC}, \overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IS}\right)$.

Dans ce repère, on donne les coordonnées des points suivants : I(0 ; 0 ; 0); A(−1 ; 0 ; 0); B(0 ; 1 ; 0); C(1 ; 0 ; 0) D(0 ; −1 ; 0); S(0 ; 0 ; 1).

2) Les coordonnées du milieu N de [KL] sont :

a. $\left(\frac{1}{4} ; \frac{1}{4} ; \frac{1}{4}\right)$ **c.** $\left(-\frac{1}{4} ; \frac{1}{4} ; \frac{1}{2}\right)$
b. $\left(\frac{1}{4} ; -\frac{1}{4} ; \frac{1}{2}\right)$ **d.** $\left(-\frac{1}{2} ; \frac{1}{2} ; 1\right)$

3) Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AS}$ sont :

a. $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ **b.** $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ **c.** $\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ **d.** $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

4) Une représentation paramétrique de la droite (AS) est :

a. $\begin{cases} x = -1-t \\ y = t \\ z = -t \end{cases}, (t \in \mathbf{R})$ **c.** $\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 1+t \end{cases}, (t \in \mathbf{R})$

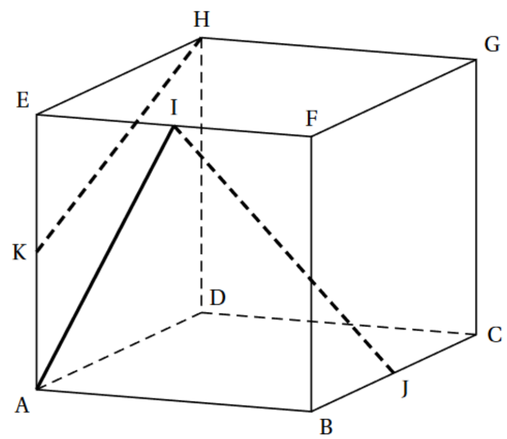
b. $\begin{cases} x = -1+2t \\ y = 0, \\ z = 1+2t \end{cases} (t \in \mathbf{R})$ **d.** $\begin{cases} x = -1-t \\ y = 1+t \\ z = 1-t \end{cases}, (t \in \mathbf{R})$

5) Une équation cartésienne du plan (SCB) est :

a. $y+z-1=0$ **c.** $x-y+z=0$
b. $x+y+z-1=0$ **d.** $x+z-1=0$

♦ PS.24 (EDS Amérique du Nord Mai 2021) Les questions 1. à 5. de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante

On considère un cube ABCDEFGH. Le point I est le milieu du segment [EF], le point J est le milieu du segment [BC] et le point K est le milieu du segment [AE].



1) Les droites (AI) et (KH) sont-elles parallèles ? Justifier votre réponse,

Dans la suite, on se place dans le repère orthonormé $\left(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

2) a) Donner les coordonnées des points I et J.

b) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires.

On considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x+3y-2z+2=0$ ainsi que les droites d_1 et d_2 définies par les représentations paramétriques ci-dessous :

$$d_1 : \begin{cases} x = 3+t \\ y = 8-2t, \quad t\in\mathbf{R} \\ z = -2+3t \end{cases} \quad d_2 : \begin{cases} x = 4+t \\ y = 1+t, \quad t\in\mathbf{R}. \\ z = 8+2t \end{cases}$$

3) Les droites d_1 et d_2 sont-elles parallèles ? Justifier votre réponse.

4) Montrer que la droite d_2 est parallèle au plan $\mathcal{P}$.

5) Montrer que le point L(4 ; 0 ; 3) est le projeté orthogonal du point M(5 ; 3 ; 1) sur le plan $\mathcal{P}$.

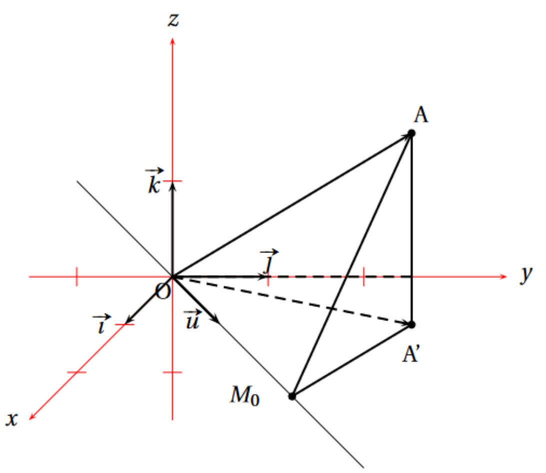
♦ PS.25 (EDS Métropole Juin 2021)

Dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$ on considère :

- le point A de coordonnées (1 ; 3 ; 2),
- le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$,
- la droite d passant par l'origine O du repère et admettant pour vecteur directeur $\vec{u}$.

Le but de cet exercice est de déterminer le point de d le plus proche du point A et d'étudier quelques propriétés de ce point.

On pourra s'appuyer sur la figure ci-contre pour raisonner au fur et à mesure des questions.



1) Pour tout point M de la droite d, on admet qu'il existe un réel t tel que M a pour coordonnées $(t\ ;\ t\ ;\ 0)$.

a) On note AM la distance entre les points A et M. Démontrer que :

$$AM^2 = 2t^2 - 8t + 14.$$

b) Démontrer que le point M_0 de coordonnées $(2\ ;\ 2\ ;\ 0)$ est le point de la droite d pour lequel la distance AM est minimale.

On admettra que la distance AM est minimale lorsque son carré AM^2 est minimal.

2) Démontrer que les droites (AM_0) et d sont orthogonales.

3) On appelle A' le projeté orthogonal du point A sur le plan d'équation cartésienne $z = 0$. Le point A' admet donc pour coordonnées $(1\ ;\ 3\ ;\ 0)$.

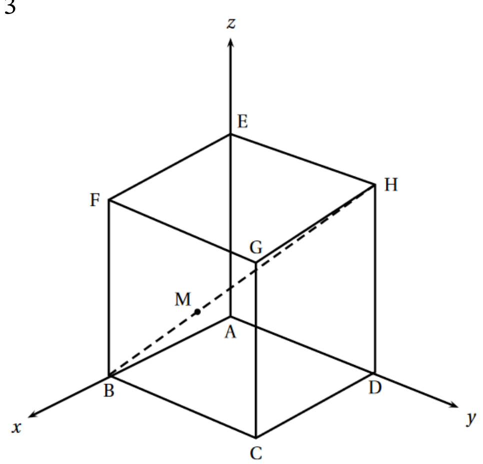
Démontrer que le point M_0 est le point du plan $(AA'M_0)$ le plus proche du point O, origine du repère.

4) Calculer le volume de la pyramide $OM_0A'A$.

On rappelle que le volume d'une pyramide est donné par : $V = \frac{1}{3}\mathcal{B}h$, où $\mathcal{B}$ est l'aire d'une base et h est la hauteur de la pyramide correspondant à cette base.

♦ PS.26 (EDS Polynésie 2021)

Dans l'espace, on considère le cube ABCDEFGH d'arête de longueur égale à 1.
On munit l'espace du repère orthonormé $\left(A\ ;\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$ et on considère le point M tel que $\overrightarrow{BM} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{BH}$.



1) Par lecture graphique, donner les coordonnées des points B, D, E, G et H.

2) a) Quelle est la nature du triangle EGD ? Justifier la réponse.

b) On admet que l'aire d'un triangle équilatéral de côté c est égale à $\dfrac{\sqrt{3}}{4}c^2$.

Montrer que l'aire du triangle EGD est égale à $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

3) Démontrer que les coordonnées de M sont $\left(\dfrac{2}{3}\ ;\ \dfrac{1}{3}\ ;\ \dfrac{1}{3}\right)$.

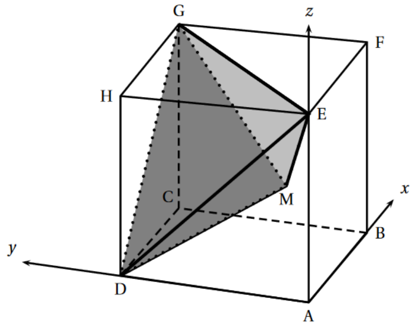
4) a) Justifier que le vecteur $\vec{n}(-1\ ;\ 1\ ;\ 1)$ est normal au plan (EGD).

b) En déduire qu'une équation cartésienne du plan (EGD) est : $-x+y+z-1=0$.

c) Soit $\mathcal{D}$ la droite orthogonale au plan (EGD) et passant par le point M.

Montrer qu'une représentation paramétrique de cette droite est : $\mathcal{D} : \begin{cases} x = \dfrac{2}{3} - t \\ y = \dfrac{1}{3} + t \\ z = \dfrac{1}{3} + t \end{cases}$.

5) Le cube ABCDEFGH est représenté ci-dessus selon une vue qui permet de mieux percevoir la pyramide GEDM, en gris sur la figure :



Le but de cette question est de calculer le volume de la pyramide GEDM.

a) Soit K, le pied de la hauteur de la pyramide GEDM issue du point M.
Démontrer que les coordonnées du point K sont $\left(\dfrac{1}{3} ; \dfrac{2}{3} ; \dfrac{2}{3}\right)$.

b) En déduire le volume de la pyramide GEDM.
On rappelle que le volume V d'une pyramide est donné par la formule $V = \dfrac{b \times h}{3}$ où b désigne l'aire d'une base et h la hauteur associée.

♦ PS.27 (11 Mai 2022, Métropole)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère :

- le point A de coordonnées $(-1 ; 1 ; 3)$,
- la droite $\mathcal{D}$ dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t, \quad t \in \mathbf{R}. \\ z = 2 + 2t \end{cases}$$

On admet que le point A n'appartient pas à la droite $\mathcal{D}$.

1) a) Donner les coordonnées d'un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite $\mathcal{D}$.

b) Montrer que le point $B(-1 ; 3 ; 0)$ appartient à la droite $\mathcal{D}$.

c) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}$.

2) On note $\mathcal{P}$ le plan passant par le point A et orthogonal à la droite $\mathcal{D}$, et on appelle H le point d'intersection du plan $\mathcal{P}$ et de la droite $\mathcal{D}$. Ainsi, H est le projeté orthogonal de A sur la droite $\mathcal{D}$.

a) Montrer que le plan $\mathcal{P}$ admet pour équation cartésienne : $2x - y + 2z - 3 = 0$.

b) En déduire que le point H a pour coordonnées $\left(\dfrac{7}{9} ; \dfrac{19}{9} ; \dfrac{16}{9}\right)$.

c) Calculer la longueur AH. On donnera une valeur exacte.

3) Dans cette question, on se propose de retrouver les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point A sur la droite $\mathcal{D}$, par une autre méthode.
On rappelle que le point $B(-1 ; 3 ; 0)$ appartient à la droite $\mathcal{D}$ et que le vecteur $\vec{u}$ est un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$.

a) Justifier qu'il existe un nombre réel k tel que $\overrightarrow{HB} = k\vec{u}$.

b) Montrer que $k = \dfrac{\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}}{\left\|\vec{u}\right\|^2}$.

c) Calculer la valeur du nombre réel k et retrouver les coordonnées du point H.

4) On considère un point C appartenant au plan $\mathcal{P}$ tel que le volume du tétraèdre ABCH soit égal à $\dfrac{8}{9}$.
Calculer l'aire du triangle ACH.
On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par : $V = \dfrac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h$ où $\mathcal{B}$ désigne l'aire d'une base et h la hauteur relative à cette base.

♦ PS.28 (Centres étrangers, 22 mars 2023)

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

On considère les points

$$A(3 ; 0 ; 1), \qquad B(2 ; 1 ; 2) \quad \text{et} \quad C(-2 ; -5 ; 1).$$

1) Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

2) Démontrer que le triangle ABC est rectangle en A.

3) Vérifier que le plan (ABC) a pour équation cartésienne :
$$-x + y - 2z + 5 = 0.$$

4) On considère le point $S(1 ; -2 ; 4)$.
Déterminer la représentation paramétrique de la droite (Δ), passant par S et orthogonale au plan (ABC).

5) On appelle H le point d'intersection de la droite (Δ) et du plan (ABC).
Montrer que les coordonnées de H sont $(0 ; -1 ; 2)$.

6) Calculer la valeur exacte de la distance SH.

7) On considère le cercle $\mathcal{C}$, inclus dans le plan (ABC), de centre H, passant par le point B. On appelle $\mathcal{D}$ le disque délimité par le cercle $\mathcal{C}$.
Déterminer la valeur exacte de l'aire du disque $\mathcal{D}$.

8) En déduire la valeur exacte du volume du cône de sommet S et de base le disque $\mathcal{D}$.