DS 2

Les numéros d'exercices et de questions doivent être soulignés, les résultats encadrés.
Soyez clairs et précis dans votre rédaction et dans la présentation de vos calculs.

♦ **DS 2.1** On considère la fonction définie sur $]-\infty;-2[\cup]-2;+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{x+1}{2x+4}.$$

1) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2) Déterminer les limites en -2^- et en -2^+ de f.
3) Quelles sont les asymptotes à la courbe de f ?
4) Calculer la dérivée de f sur $]-\infty;-2[\cup]-2;+\infty[$.
5) Dresser le tableau de variation complet de f sur $]-\infty;-2[\cup]-2;+\infty[$.

♦ **DS 2.2** On considère la fonction g définie sur $\mathbf{R}^*$ par $g(x)=\left(5x+\dfrac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{-x}$.

1) Donner la limite de g en $-\infty$.
2) Donner la limite de g en $+\infty$.
3) Donner la limite de g en 0^-.

♦ **DS 2.3** (**Asie, J1 2025**) On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x)=\frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}},$$

et on appelle $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1) On définit la fonction g sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $g(x)=\mathrm{e}^{\sqrt{x}}$.
   a) Montrer que $g'(x)=f(x)$ pour tout x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
   b) Pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, calculer $f'(x)$ et montrer que :

$$f'(x)=\frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}-1\right)}{4x\sqrt{x}}.$$

2) a) Déterminer la limite de la fonction f en 0.
   b) Interpréter graphiquement ce résultat.
3) a) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
   b) Étudier le sens de variation de la fonction f sur $]0\,;\,+\infty[$.
   Dresser le tableau de variations de la fonction f en y faisant figurer les limites aux bornes de l'intervalle de définition.
   c) Montrer que l'équation $f(x)=2$ admet une unique solution sur l'intervalle $[1\,;\,+\infty[$ et donner une valeur approchée à 10^{-1} près de cette solution.
4) *Sera vu avec le chapitre 10.*
5) On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ et que :

$$f''(x)=\frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}\left(x-3\sqrt{x}+3\right)}{8x^2\sqrt{x}}.$$

   a) En posant $X=\sqrt{x}$, montrer que $x-3\sqrt{x}+3>0$ pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
   b) Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

Correction exercice 1 :

1) Classiquement, $\forall x \notin \{0;-2\}$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x+1}{2x+4} \\ &= \frac{1+\frac{1}{x}}{2+\frac{4}{x}}. \end{aligned}$$

Or $\lim\limits_{x\to\pm\infty} 1+\frac{1}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to\pm\infty} 2+\frac{4}{x} = 2$ donc par quotient : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \frac{1}{2}$.

2) On a :

- $\lim\limits_{x\to-2} x+1 = -1$;
- $\lim\limits_{x\to-2} 2x+4 = 0$.

On se donne donc le tableau de signe de $2x+4$:

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
Signe de $2x+4$		$-$	0	$+$	

Et donc : $\lim\limits_{x\to-2^-} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x) = -\infty$.

3) La courbe de f admet (au moins) deux asymptotes d'équation $x=-2$ et $y=1/2$.

4) f est dérivable comme quotient de fonctions affines (donc dérivables) dont le dénominateur ne s'annule pas et (après calculs) :

$$\forall x \in \mathbf{R}\setminus\{-2\}, \quad f'(x) = \frac{2}{(2x+4)^2}.$$

5) On remarque immédiatement que $\forall x \in \mathbf{R}\setminus\{-2\}, \quad f'(x) > 0$. On a donc le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	||	$+$	
Variations de f	$1/2$	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	$1/2$

Correction exercice 2 :

1) On a :

- $\lim\limits_{x\to-\infty} 5x = -\infty$;
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$;
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-x} = +\infty$;

Donc par somme puis produit, $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$.

2) On écrit $\lim\limits_{x\to+\infty} 5x\mathrm{e}^{-x} = 0$ par croissances comparées et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

3) On a :

- $\lim\limits_{x\to0^-} 5x = 0$;
- $\lim\limits_{x\to0^-} \frac{1}{x} = -\infty$;
- $\lim\limits_{x\to0^-} \mathrm{e}^{-x} = 1$.

Et finalement $\lim\limits_{x\to0^-} g(x) = -\infty$.

Correction exercice 3 (Asie, J1 2025) : On considère f la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $f(x) = \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$ et on appelle C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1) On définit la fonction g sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = \mathrm{e}^{\sqrt{x}}$

a) La fonction g est continue et dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ comme composée de fonctions dérivables sur cet intervalle, et $\forall x \in]0\,;\,+\infty[$,

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \times \mathrm{e}^{\sqrt{x}} = \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} = f(x).$$

b) La fonction f est continue et dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ comme quotient de fonctions dérivables sur cet intervalle dont le dénominateur ne s'annule pas, et $\forall x \in]0\,;\,+\infty[$,

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{e}^{\sqrt{x}} \times 2\sqrt{x} - \mathrm{e}^{\sqrt{x}} \times 2\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(2\sqrt{x})^2} = \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}} - \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}}{4x} = \frac{\frac{\sqrt{x}\mathrm{e}^{\sqrt{x}} - \mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}}{4x} = \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)}{4x\sqrt{x}}.$$

2) a) $\lim\limits_{x\to 0} \mathrm{e}^{\sqrt{x}} = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0} 2\sqrt{x} = 0$ avec $\frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} > 0$ donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$.

b) C_f admet donc une asymptote verticale d'équation $x = 0$.

3) a) D'après le théorème des croissances comparées, $\lim\limits_{u\to +\infty} \frac{\mathrm{e}^u}{u} = +\infty$ donc par composition de limites (en posant $u(x) = \sqrt{x}$) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$.

b) $\forall x \in]0\,;\,+\infty[$, $\mathrm{e}^{\sqrt{x}} > 0$ et $4x\sqrt{x} > 0$ donc $f'(x)$ a le même signe que $\sqrt{x} - 1$.
$\sqrt{x} - 1 \geqslant 0 \iff \sqrt{x} \geqslant 1 \iff x \geqslant 1$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	$\frac{\mathrm{e}}{2}$	↗	$+\infty$

c) La fonction f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[1\,;\,+\infty[$ à valeurs dans $\left[\frac{\mathrm{e}}{2}\,;\,+\infty\right[$. Or $2 \in \left[\frac{\mathrm{e}}{2}\,;\,+\infty\right[$ (car $\frac{\mathrm{e}}{2} < 2$) donc d'après le corollaire du TVI, l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution notée α dans $[1;+\infty[$.
À la calculatrice : $\alpha \approx 4{,}6$.

4) *Sera vu avec le chapitre 10.*

5) $\forall x \in]0\,;\,+\infty[$, $f''(x) = \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}(x - 3\sqrt{x} + 3)}{8x^2\sqrt{x}}$

a) On pose $\forall x \in]0\,;\,+\infty[$, $X = \sqrt{x}$.
$x - 3\sqrt{x} + 3 = X^2 - 3X + 3$.
$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 3 = -3 < 0$ donc $\forall X \in]0\,;\,+\infty[$, $X^2 - 3X + 3 > 0$ donc $\forall x \in]0;+\infty[$, $x - 3\sqrt{x} + 3 > 0$.

b) $\forall x \in]0;+\infty[$, $e^{\sqrt{x}} > 0$ et $x - 3\sqrt{x} + 3 > 0$ et $8x^2\sqrt{x} > 0$ donc $f''(x) > 0$.
La fonction f est convexe sur $]0\,;\,+\infty[$.