♦ **BAC.1** (**Amérique du Nord, J2 2025**) Au basket-ball, il est possible de marquer des paniers rapportant un point, deux points ou trois points.

Les parties **A** et **B** sont indépendantes.

Partie A

L'entraineur d'une équipe de basket décide d'étudier les statistiques de réussite des lancers de ses joueurs. Il constate qu'à l'entrainement, lorsque Victor tente un panier à trois points, il le réussit avec une probabilité de 0,32.

Lors d'un entrainement, Victor effectue une série de 15 lancers à trois points. On suppose que ces lancers sont indépendants.

On note N la variable aléatoire qui donne le nombre de paniers marqués.

Les résultats des probabilités demandées seront, si nécessaire, arrondis au millième.

1) On admet que la variable aléatoire N suit une loi binomiale. Préciser ses paramètres.
2) Calculer la probabilité que Victor réussisse exactement 4 paniers lors de cette série.
3) Déterminer la probabilité que Victor réussisse au plus 6 paniers lors de cette série.
4) Déterminer l'espérance de la variable aléatoire N.
5) On note T la variable aléatoire qui donne le nombre de **points** marqués après cette série de lancers.
   a) Exprimer T en fonction de N.
   b) En déduire l'espérance de la variable aléatoire T. Donner une interprétation de cette valeur dans le contexte de l'exercice.
   c) Calculer $\mathbf{P}(12 \leqslant T \leqslant 18)$.

Partie B

Cette partie sera vue avec le chapitre 11.

On note X la variable aléatoire donnant le nombre de points marqués par Victor lors d'un match.

On admet que l'espérance $\mathbf{E}(X) = 22$ et la variance $\mathbf{V}(X) = 65$.

Victor joue n matchs, où n est un nombre entier strictement positif.

On note $X_1, X_2, \ldots, X_n$ les variables aléatoires donnant le nombre de points marqués au cours des $1^{er}, 2^{e}, \ldots, n$-ième matchs. On admet que les variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont indépendantes et suivent la même loi que celle de X.

On pose $\quad M_n = \dfrac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}$.

1) Dans cette question, on prend $n = 50$.
   a) Que représente la variable aléatoire M_{50} ?
   b) Déterminer l'espérance et la variance de M_{50}.
   c) Démontrer que $\mathbf{P}\left(|M_{50} - 22| \geqslant 3\right) \leqslant \dfrac{13}{90}$.
   d) En déduire que la probabilité de l'évènement « $19 < M_{50} < 25$ » est strictement supérieure à 0,85.
2) Indiquer, en justifiant, si l'affirmation suivante est vraie ou fausse :
   « Il n'existe aucun entier naturel n tel que $\mathbf{P}\big(|M_n - 22| \geqslant 3\big) < 0{,}01$ ».

☞ **Correction exercice 1 (Amérique du Nord, J2 2025) :**

Partie A

On note N la variable aléatoire qui donne le nombre de paniers marqués.

Les résultats des probabilités demandées seront, si nécessaire, arrondis au millième.

1) L'épreuve est effectuée 15 fois de façon indépendante et à chaque lancer la probabilité de marquer est égale à 0,32. N suit donc la loi binomiale $\mathcal{B}(15\ ;\ 0{,}32)$.

2) La probabilité que Victor réussisse exactement 4 paniers est :
$\mathbf{P}(N=4)=\binom{15}{4}\times 0{,}32^4\times(1-0{,}32)^{15-4}\approx 0{,}206$ au millième près.

3) La probabilité que Victor réussisse au plus 6 paniers est :
$P(N\leqslant 6)=\mathbf{P}(N=0)+\mathbf{P}(N=1)+\ldots+\mathbf{P}(N=6)\approx 0{,}828$ (calculatrice).

4) On sait que : $\mathbf{E}(N)=n\times p=15\times 0{,}32=4{,}8$.
Donc en moyenne sur 150 lancers, Victor marque 48 paniers.

5) **a)** Chaque lancer étant à 3 points, on a donc $T=3N$.

b) On a $\mathbf{E}(T)=\mathbf{E}(3N)=3\mathbf{E}(N)$ d'après la linéarité de l'espérance, soit
$\mathbf{E}(T)=3\times 4{,}8=14{,}4$, donc une moyenne de 144 points marqués sur 150 lancers.

c) On a $\mathbf{P}(12\leqslant T=3N\leqslant 18)=\mathbf{P}(4\leqslant N\leqslant 6)$.
Cette probabilité est égale à :
$\mathbf{P}(4\leqslant N\leqslant 6)=\mathbf{P}(N=4)+\mathbf{P}(N=5)+\mathbf{P}(N=6)\approx 0{,}206+0{,}213+0{,}167$, soit

$$\mathbf{P}(12\leqslant T\leqslant 18)\approx 0{,}586.$$

Partie B

Cette partie sera vue avec le chapitre 11.

1) Dans cette question, on prend $n=50$.

a) M_{50} représente la moyenne empirique, sur 50 matchs, des points marqués par Victor

b) • Chaque variable $X_1,\ldots,X_{50}$ suit la même loi que X donc on a :
$\mathbf{E}(M_{50})=\mathbf{E}(X)=22$;

• Comme les variables $X_1, X_2, \ldots X_50$ sont indépendantes, on en déduit : $\mathbf{V}(M_{50})=\dfrac{1}{50}\mathbf{V}(X)=\dfrac{1}{50}\times 65=\dfrac{65}{50}=\dfrac{130}{100}=1{,}3$.

c) D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchébychev, pour une variable aléatoire X d'espérance $\mathbf{E}(X)$ et de variance $\mathbf{V}(X)$, pour tout réel $a>0$:

$$\mathbf{P}(|X-\mathbf{E}(X)|\geqslant a)\leqslant\frac{\mathbf{V}(X)}{a^2}$$

donc ici : $\mathbf{P}(|M_{50}-\mathbf{E}(M_{50})|\geqslant 3)\leqslant\dfrac{\mathbf{V}(M_{50})}{3^2}$

Comme $\dfrac{\mathbf{V}(M_{50})}{3^2}=\dfrac{1{,}3}{9}=\dfrac{13}{90}$, on a bien : $\mathbf{P}\left(|M_{50}-22|\geqslant 3\right)\leqslant\dfrac{13}{90}$.

d) L'événement « $19<M_{50}<25$ » revient à $|M_{50}-22|<3$ et
$\mathbf{P}\left(|M_{50}-22|<3\right)=1-\mathbf{P}\left(|M_{50}-22|\geqslant 3\right)$.
Soit $\mathbf{P}\left(|M_{50}-22|\geqslant 3\right)\leqslant\dfrac{13}{90}$ entraîne $\mathbf{P}(19<M_{50}<25)\geqslant 1-\dfrac{13}{90}=\dfrac{77}{90}\approx 0{,}856$: cette probabilité est bien supérieure à 0,85.

2) D'après la loi faible des grands nombres, $\forall t\in\mathbf{R}^{*+}$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathbf{P}\Big(|M_n-\mathbf{E}(X)|\geqslant t\Big)=0$, donc en particulier ici, $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathbf{P}\Big(|M_n-22|\geqslant 3\Big)=0$.
donc pour tout $r>0$ il existe un rang N tel que pour tout $n\geqslant N$, $\mathbf{P}\left(|M_n-22|\geqslant 3\right)<r$ et c'est vrai en particulier pour $r=0{,}01$.
L'affirmation est donc fausse.

Autre méthode :
Pour tout réel $t>0$, d'après l'inégalité de concentration, on a :
$\mathbf{P}\left(|M_n-\mathbf{E}(X)|\geqslant t\right)\leqslant\dfrac{\mathbf{V}(X)}{t^2n}$

Pour $t=3$ on obtient : $\mathbf{P}(|M_n-22|\geqslant 3)\leqslant\dfrac{65}{n\times 3^2}$.

On veut donc que : $\dfrac{65}{9n}\leqslant 0{,}01\iff\dfrac{6500}{9}\leqslant n$

$$\iff 722+\frac{2}{9}\leqslant n$$

L'inégalité est donc vraie pour tout entier $n\geqslant 723$.

♦ **BAC.2** (**Amérique du Nord, J2 Secours 2025**) Dans cet exercice, les réponses seront arrondies à 10^{-4} près.

Durant la saison hivernale, la circulation d'un virus a entraîné la contamination de 2 % de la population d'un pays. Dans ce pays, 90 % de la population a été vaccinée contre ce virus.

On constate que 62 % des personnes contaminées avaient été vaccinées.

On interroge au hasard une personne, et on note les évènements suivants :

C : « la personne a été contaminée »

V : « la personne a été vaccinée ».

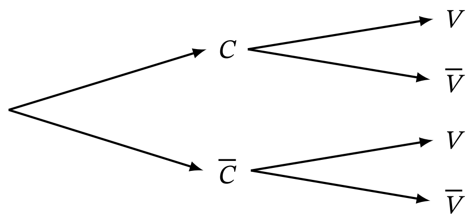
Les évènements contraires des évènements C et V sont notés respectivement $\overline{C}$ et $\overline{V}$.

1) À partir de l'énoncé, donner, sans calcul, les probabilités $\mathbf{P}(C)$, $\mathbf{P}(V)$ et la probabilité conditionnelle $\mathbf{P}_C(V)$.

2) a) Calculer $\mathbf{P}(C \cap V)$.

b) En déduire $\mathbf{P}\left(\overline{C} \cap V\right)$.

3) Recopier l'arbre des probabilités ci-dessous et le compléter.



4) Calculer $\mathbf{P}_V(C)$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

5) Déterminer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses en justifiant votre réponse.

a) « Parmi les personnes non contaminées, il y a dix fois plus de personnes vaccinées que de personnes non vaccinées. »

b) « Plus de 98 % de la population vaccinée n'a pas été contaminée. »

6) On s'intéresse à un échantillon de 20 personnes choisies au hasard dans la population.
La population du pays est assez importante pour qu'on puisse assimiler ce choix à des tirages successifs avec remise.
On note X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de personnes contaminées.
On rappelle que, pour une personne choisie au hasard, la probabilité d'être contaminée est $p = 0,02$.

a) Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire X ? Justifier et donner ses paramètres.

b) Calculer, en rappelant la formule, la probabilité que 4 personnes exactement soient contaminées dans ce groupe de 20 personnes.

☞ **Correction exercice 2 (Amérique du Nord, J2 Secours 2025) :**

1) Ici, on interroge une personne au hasard, donc toutes les personnes qui constituent la population du pays ont la même probabilité d'être choisis : c'est une situation d'équiprobabilité et donc les proportions sont assimilables à des probabilités.

On a donc :

- $\mathbf{P}(C) = 0{,}02$, car 2 % de la population du pays a été contaminée ;
- $\mathbf{P}(V) = 0{,}9$, car 90 % de la population a été vaccinée ;
- $\mathbf{P}_C(V) = 0{,}62$, car 62 % des personnes contaminées ont été vaccinées.

2) a) On a : $\mathbf{P}(C \cap V) = \mathbf{P}(C) \times \mathbf{P}_C(V) = 0{,}02 \times 0{,}62 = 0{,}0124$.

b) Les évènements C et $\overline{C}$ partitionnent l'univers, donc, d'après la formule des probabilités totales :

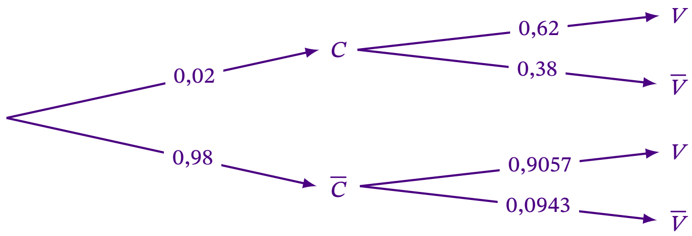
$\mathbf{P}(V) = \mathbf{P}(C \cap V) + \mathbf{P}(\overline{C} \cap V) \iff \mathbf{P}(\overline{C} \cap V) = \mathbf{P}(V) - \mathbf{P}(C \cap V)$

On a donc : $\mathbf{P}(\overline{C} \cap V) = \mathbf{P}(V) - \mathbf{P}(C \cap V) = 0{,}9 - 0{,}0124 = 0{,}887\,6$

3) Pour compléter l'arbre de probabilité, il nous faut $\mathbf{P}_{\overline{C}}(V)$.

Par définition : $\mathbf{P}_{\overline{C}}(V) = \dfrac{\mathbf{P}(\overline{C} \cap V)}{\mathbf{P}(\overline{C})} = \dfrac{0{,}8876}{1 - \mathbf{P}(C)} = \dfrac{0{,}8876}{0{,}98} \approx 0{,}9057$ au dix-millième près.

Et donc :



4) Par définition : $\mathbf{P}_V(C) = \dfrac{\mathbf{P}(V \cap C)}{\mathbf{P}(V)} = \dfrac{0{,}0124}{0{,}9} \approx 0{,}0138$.

Dans le contexte de l'exercice, cela signifie qu'environ 1,38 % des personnes vaccinées ont été contaminées par le virus.

5) a) « Parmi les personnes non contaminées, il y a dix fois plus de personnes vaccinées que de personnes non vaccinées. ».

Cette affirmation est **fausse**, car un peu exagérée, parmi les personnes non contaminées, environ 90,57 % d'entre elles sont vaccinées, quand 9,43 % d'entre elles ne le sont pas, mais le décuple de 9,43 % est 94,3 %, qui est donc supérieur à 90,57 %.

Il y a $\dfrac{90{,}57}{9{,}43} \approx 9{,}6$ fois plus de personnes vaccinées que non vaccinées parmi les personnes non contaminées.

b) « Plus de 98 % de la population vaccinée n'a pas été contaminée. »

Cette affirmation est **vraie**, car on a calculé qu'environ 1,38 % des personnes vaccinées ont été contaminées par le virus, donc, par complémentaire, cela implique qu'environ 98,62 % des personnes vaccinées n'ont pas été contaminées. Il est donc correct de dire que c'est plus de 98 %.

6) a)
- On a une épreuve aléatoire à deux issues. On qualifie de succès l'évènement C, de probabilité $p = 0{,}02$;
- Cette épreuve est répétée $n = 20$ fois pour constituer l'échantillon de 20 personnes. La répétition étant assimilable à des tirages successifs avec remise, on peut dire que les répétitions sont identiques et indépendantes ;
- La variable aléatoire X compte le nombres de personnes contaminées, donc le nombre de succès, dans l'échantillon.

Ces trois éléments garantissent que X suit la loi binomiale, de paramètres $n = 20$ et $p = 0{,}02$.

b) La probabilité que 4 personnes exactement soient contaminées dans ce groupe de 20 personnes est :

$\mathbf{P}(X = 4) = \dbinom{20}{4} \times 0{,}02^4 \times 0{,}98^{20-4} = 4\,845 \times 0{,}02^4 \times 0{,}98^{16} \approx 5{,}6 \times 10^{-4}$

Finalement, avec les consignes d'arrondi : $\mathbf{P}(X = 4) \approx 0{,}0006$