☞ **Correction exercice 2 :**

1) a) La droite $\mathcal{D}$ dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x &= 1+2t \\ y &= 2-t \\ z &= 2+2t \end{cases}$, $t \in \mathbf{R}$ a pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

b) Si B appartient à la droite $\mathcal{D}$ alors $\exists t \in \mathbf{R}$ tel que :

$\begin{cases} -1 &= 1+2t \\ 3 &= 2-t \\ 0 &= 2+2t \end{cases} \iff \begin{cases} 2t &= -2 \\ -t &= 1 \\ 2t &= -2t \end{cases} \iff t=-1$. Donc $B \in \mathcal{D}$.

c) On a $A(-1\,;\,1\,;\,3)$ et $B(-1\,;\,3\,;\,0)$. Donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Alors $\overrightarrow{AB}.\vec{u} = 0\times 2 + 2\times(-1) + (-3)\times 2 = -8$

2) a) Le plan $\mathcal{P}$ passant par A est orthogonal à la droite $\mathcal{D}$. Donc $\mathcal{P}$ a pour vecteur normal le vecteur $\vec{u}$ (vecteur directeur de $\mathcal{D}$).
Son équation cartésienne sera de la forme $ax+by+cz+d=0$, où $(a\,;\,b\,;\,c)$ sont les cordonnées d'un vecteur normal au plan.
En prenant comme vecteur normal à $\mathcal{P}$ le vecteur $\vec{u}$, on obtient : $\mathcal{P}$:
$2x-y+2z+d=0$. Or $A \in \mathcal{P}$ donc $-2-1+6+d=0$ donc $d=-3$. Donc $\mathcal{P}$ a pour équation $2x-y+2z-3=0$

b) Le projeté orthogonal de A sur la droite $\mathcal{D}$, noté H, est l'unique point d'intersection de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$. Résolvons donc le système suivant :

$\begin{cases} 2x-y+2z-3 &= 0 \\ x &= 1+2t \\ y &= 2-t \\ z &= 2+2t \end{cases}$. On remplace x, y et z dans la première équation :

$2x-y+2z-3=0 \iff 2(1+2t)-(2-t)+2(2+2t)-3=0 \iff$
$2+4t-2+t+4+4t=0 \iff 9t+1=0 \iff t=-\dfrac{1}{9}$.

On remplace la valeur de t dans les trois dernières équations :

$\begin{cases} x &= 1+2\times -\dfrac{1}{9} = \dfrac{7}{9} \\ y &= 2-\left(-\dfrac{1}{9}\right) = \dfrac{19}{9} \\ z &= 2+2\times\left(-\dfrac{1}{9}\right) = \dfrac{16}{9} \end{cases}$. Donc $H\left(\dfrac{7}{9}\,;\,\dfrac{19}{9}\,;\,\dfrac{16}{9}\right)$.

c) Déterminons les coordonnées de $\overrightarrow{AH}$ avec $A(-1\,;\,1\,;\,3)$ et $H\left(\dfrac{7}{9}\,;\,\dfrac{19}{9}\,;\,\dfrac{16}{9}\right)$: $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix} \frac{16}{9} \\ \frac{10}{9} \\ -\frac{11}{9} \end{pmatrix}$.

Donc $\left\|\overrightarrow{AH}\right\| = \sqrt{\left(\dfrac{16}{9}\right)^2+\left(\dfrac{10}{9}\right)^2+\left(-\dfrac{11}{9}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{477}}{9} = \dfrac{\sqrt{53}}{3}$

3) a) Les points H et B appartiennent à $\mathcal{D}$, donc le vecteur $\overrightarrow{HB}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$, tout comme $\vec{u}$. Donc les vecteurs $\overrightarrow{HB}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires donc $\exists k \in \mathbf{R}$ tel que
$\overrightarrow{HB} = k\times\vec{u}$.

b) D'après les propriétés du produit scalaire, et en utilisant la relation de Chasles,
$\overrightarrow{AB}.\vec{u} = \left(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HB}\right).\vec{u} = \overrightarrow{AH}.\vec{u}+\overrightarrow{HB}.\vec{u}$.

Or les points A et H appartiennent au plan $\mathcal{P}$ normal à la droite $\mathcal{D}$, donc tout vecteur de $\mathcal{P}$ est orthogonal à tout vecteur de $\mathcal{D}$ donc $\overrightarrow{AH} \perp \vec{u}$ donc $\overrightarrow{AH}.\vec{u}=0$.

Donc $\overrightarrow{AB}.\vec{u} = \overrightarrow{HB}.\vec{u} = k\times\vec{u}.\vec{u} = k\,\vec{u}^2 = k\,\|\vec{u}\|^2$ donc $k = \dfrac{\overrightarrow{AB}.\vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}$.

c) On a $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ donc $\|\vec{u}\| = \sqrt{2^2+(-1)^2+2^2} = \sqrt{9} = 3$ et $\overrightarrow{AB}.\vec{u} = -8$ donc

$k = \dfrac{-8}{3^2} = -\dfrac{8}{9}$.

Donc en posant $H(x\,;\,y\,;\,z)$ et $B(-1\,;\,3\,;\,0)$ alors $\overrightarrow{HB}\begin{pmatrix} -1-x \\ 3-y \\ -z \end{pmatrix}$.

De plus $\overrightarrow{HB} = k \times \vec{u} = -\frac{8}{9} \times \vec{u}$ donc $\begin{cases} -1-x & = & -\frac{8}{9} \times 2 \\ 3-y & = & -\frac{8}{9} \times (-1) \\ -z & = & -\frac{8}{9} \times 2 \end{cases}$

Donc $x = \frac{16}{9} - 1 = \frac{7}{9}$, $y = 3 - \frac{8}{9} = \frac{19}{9}$ et $z = \frac{16}{9}$. On retrouve les coordonnées du point H.

4) Les points A, H et C appartiennent au plan $\mathcal{P}$. H est le projeté orthogonal de B sur $\mathcal{P}$. Le tétraèdre $BAHC$ a pour base le triangle AHC et pour hauteur BH.

Donc $\mathcal{V}_{BAHC} = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{AHC} \times BH$ d'où $\mathcal{A}_{AHC} = \frac{3 \times \mathcal{V}_{BAHC}}{BH}$.

D'après la question **3. c**, $\overrightarrow{HB} = k \times \vec{u} =$ donc $\overrightarrow{HB} \begin{pmatrix} \frac{16}{9} \\ -\frac{8}{9} \\ \frac{16}{9} \end{pmatrix}$ donc

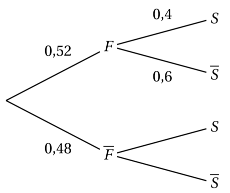
$HB = \sqrt{\left(\frac{16}{9}\right)^2 + \left(-\frac{8}{9}\right)^2 + \left(\frac{16}{9}\right)^2} = \frac{8}{3}$

Donc $\mathcal{A}_{AHC} = \dfrac{3 \times \frac{8}{9}}{\frac{8}{3}} = 1$ unité d'aire.

☞ **Correction exercice 3 :**

1) a) L'énoncé nous indique que ce stage a été suivi par 25 % des salariés. Donc $p(S) = 0{,}25$.

b) L'arbre complété avec les valeurs disponibles :



c) On calcule $\mathbf{P}(F \cap S)$: $\mathbf{P}(F \cap S) = \mathbf{P}_S(F) \times \mathbf{P}(S) = 0{,}4 \times 0{,}52 = 0{,}208$

d) On cherche calculer $\mathbf{P}_S(F)$. D'après la formule de Bayes,

$\mathbf{P}_S(F) = \frac{\mathbf{P}(F \cap S)}{\mathbf{P}(S)} = \frac{0{,}208}{0{,}25} = 0{,}832$

e) Appliquons la formule des probabilités totales : $\mathbf{P}(S) = \mathbf{P}(S \cap F) + \mathbf{P}(S \cap \overline{F})$.

Donc $\mathbf{P}\left(S \cap \overline{F}\right) = \mathbf{P}(S) - \mathbf{P}(S \cap F) = 0{,}25 - 0{,}208 = 0{,}042$.

Avec la formule de Bayes : $\mathbf{P}_{\overline{F}}(S) = \frac{\mathbf{P}(S \cap \overline{F})}{\mathbf{P}(\overline{F})} = \frac{0{,}042}{0{,}48} = 0{,}0875 < 0{,}1$.

L'affirmation du directeur est donc exacte.

2) a) Il s'agit là d'un schéma de Bernoulli : la répétition de 20 expériences aléatoires n'ayant que deux issues, identiques et indépendantes entre elles. X est la variable aléatoire qui compte les succès. X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0{,}25$: $X \sim \mathcal{B}(20\,;\, 0{,}25)$

b) $\mathbf{P}(X = 5) = \binom{20}{5} \times 0{,}25^5 \times (1 - 0{,}25)^{20-5} \approx 0{,}202$.

La probabilité qu'exactement 5 salariés suivent le stage est d'environ 0,202.

c) « proba(5) » calcule pour k allant de 0 à 5, la somme des probabilités $p(X = k)$,

À la calculatrice, $\mathbf{P}(X \leqslant 5) \approx 0{,}617$.

Cela signifie que la probabilité qu'au plus 5 salariés aient effectué le stage, est égale à 0,617.

La probabilité qu'au moins 6 salariés suivent le stage est d'environ 0,617.

d) $\mathbf{P}(X \geqslant 6) = 1 - \mathbf{P}(X < 6) = 1 - \mathbf{P}(X \leqslant 5) \approx 1 - 0{,}617 \approx 0{,}383$

3) • Premier exemple : supposons qu'il y ait 25 salariés à 1 000 € et 75 à 1 200 €, les premiers ayant fait le stage.

Le salaire moyen est égal à $\frac{25 \times 1\,000 + 75 \times 1\,200}{100} = 1\,150$ €.

Après augmentation le salaire moyen passe à :

$\frac{25 \times 1\,000 \times 1{,}05 + 75 \times 1\,200 \times 1{,}02}{100} = 1\,180{,}50$ €.

L'augmentation moyenne est donc égale à $\frac{1\,180{,}5}{1\,150} \approx 1{,}0265$, soit une augmentation d'environ 2,65 %.

• Deuxième exemple : supposons qu'il y ait 25 salariés à 1 200 € et 75 à 1 000 €, les premiers ayant fait le stage.

Le salaire moyen est égal à $\frac{25 \times 1\,200 + 75 \times 1\,000}{100} = 1\,050$ €.

Après augmentation le salaire moyen passe à :

$\frac{25 \times 1\,200 \times 1{,}05 + 75 \times 1\,000 \times 1{,}02}{100} = 1\,080$ €.

L'augmentation moyenne est donc égale à $\frac{1\,080}{1\,050} \approx 1{,}0285$, soit une augmentation d'environ 2,85 %.

Conclusion : l'augmentation moyenne dépend de la répartition des salaires : on ne peut pas répondre à cette question.

☞ **Correction exercice 5 :** L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$.

On considère les points

$$A(3\,;0\,;1),\qquad B(2\,;1\,;2)\quad\text{et}\quad C(-2\,;\,-5\,;\,1).$$

1) On considère les vecteurs $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-5\\-5\\0\end{pmatrix}$: ces coordonnées ne sont pas proportionnelles, donc les vecteurs ne sont pas colinéaires ; les trois points A, B et C définissent donc un plan noté (ABC).

2) On a $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(-1)\times(-5)+1\times(-5)+1\times0=5-5+0=0$: les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux, les droites (AB) et (AC) sont donc perpendiculaires en A et le triangle ABC est rectangle en A.

3) On a $A(3\,;\,0\,;\,1)\in ABC \iff -3+0-2+5=0$ égalité vraie ;
$B(2\,;\,1\,;\,2)\in ABC \iff -2+1-4+5=0$ égalité vraie ;
$A(-2\,;\,-5\,;\,1)\in ABC \iff 2-5-2+5=0$ égalité vraie.
Les coordonnées des points A, B et C vérifient l'équation donnée : comme il n'existe qu'un plan contenant trois points distincts non alignés une équation du plan ABC est :

$$M(x\,;\,y\,;\,z)\in ABC \iff -x+y-2z+5=0.$$

4) On considère le point $S(1\,;\,-2\,;\,4)$.

On sait qu'un vecteur normal au plan ABC a pour coordonnées les coefficients de x,y et z dans l'équation de ce plan. Donc on a $\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}$.

La droite (Δ) orthogonale au plan ABC a un vecteur directeur colinéaire au vecteur $\vec{n}$.
Donc $M(x\,;\,y\,;\,z)\in(\Delta) \iff \overrightarrow{SM}=t\vec{n}$, avec $t\in\mathbf{R}$, ce qui se traduit par les équations paramétriques :

$$\left\{\begin{array}{lcl}x-1&=&-t\\y-(-2)&=&1t\\z-4&=&-2t\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl}x&=&1-t\\y&=&-2+t\\z&=&4-2t\end{array}\right.\quad t\in\mathbf{R} \iff M(x\,;\,y\,;\,z)\in(\Delta).$$

5) On appelle H le point d'intersection de la droite (Δ) et du plan (ABC).
Le point commun à la droite (Δ) et au plan ABC a ses coordonnées qui vérifient les équations de Δ et l'équation du plan, soit le système :

$$\left\{\begin{array}{lcl}x&=&1-t\\y&=&-2+t\\z&=&4-2t\\-x+y-2z+5&=&0\end{array}\right.$$ En remplaçant x,y et z dans la dernière équation par leur valeur en fonction de t, on obtient :

$-(1-t)+(-2+t)-2(4-2t)+5=0 \iff -1+t-2+t-8+4t+5=0 \iff 6t-6=0 \iff t=1$ On a donc $x=1-1=0$, $y=-2+1=-1$, $z=4-2=2$, soit $H(0\,;\,-1\,;\,2)$.

6) On a $SH^2=(0-1)^2+(-1-(-2))^2+(2-4)^2=1+1+4=6$, donc $SH=\sqrt{6}$.

7) On considère le cercle $\mathcal{C}$, inclus dans le plan (ABC), de centre H, passant par le point B. On appelle $\mathcal{D}$ le disque délimité par le cercle $\mathcal{C}$.
Déterminer la valeur exacte de l'aire du disque $\mathcal{D}$. On a $HB^2=(-2)^2+(-2)^2+0^2=4+4=4\times2$, d'où $HB=2\sqrt{2}$.
L'aire du disque $\mathcal{D}$ est égale à $\mathcal{A}=\pi\times HB^2=8\pi$.

8) (SH) est perpendiculaire au plan ABC du disque, donc [SH] est la hauteur du cône et la base est le disque $\mathcal{D}$, donc :
$\mathcal{V}=\dfrac{8\pi\times\sqrt{6}}{3}$.

☞ **Correction exercice 6 :** Une chaîne de fabrication produit des pièces mécaniques. On estime que 4 % des pièces produites par cette chaîne sont défectueuses.

On choisit au hasard n pièces produites par la chaîne de fabrication.

Le nombre de pièces produites est suffisamment grand pour que ce choix puisse être assimilé à un tirage avec remise.

On note X la variable aléatoire égale au nombre de pièces défectueuses tirées.

Dans les trois questions suivantes, on prend $n=50$.

1) On a $p(X\geqslant1)=1-p(X=0)=1-0{,}04^0\times0{,}96^{50}\approx1-0{,}1299\approx0{,}8701$ soit 0,870 au millième près : réponse **b.**

2) La probabilité $p(3<X\leqslant7)$ est égale à : $p(X\leqslant7)-p(x\leqslant3)\approx0{,}9992-0{,}8609$ soit 0,138 3. Réponse **b.**

3) Quel est le plus petit entier naturel k tel que la probabilité de tirer au plus k pièces défectueuses soit supérieure ou égale à 95 % ?
La calculatrice donne $k=4$, réponse **c.**
Dans les questions suivantes, n ne vaut plus nécessairement 50.

a) Quelle est la probabilité de ne tirer que des pièces défectueuses ?
Réponse **a.**

b) On considère la fonction Python ci-dessous. Que renvoie-t-elle ?
La fonction donne le plus petit naturel n tel que $1-0{,}96^n\geqslant$ x.
Réponse **a.**