Chapitre 6

Probabilités

Ce n'est qu'en essayant continuellement que l'on finit par réussir, donc plus ça rate, plus on a de chances que ça marche.

La fusée interplanétaire des Shadoks n'était pas très au point, mais ils avaient calculé qu'elle avait quand même une chance sur un million de marcher. Et ils se dépêchaient de bien rater les 999999 premiers essais pour être sûrs que le millionième marche.

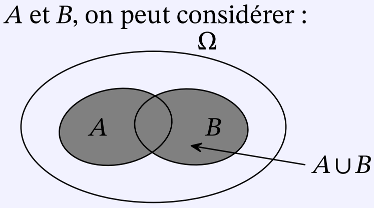
Jacques Rouxel (1931-2004).

I Vocabulaire des ensembles

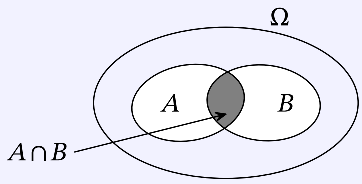
6.1.1 Définitions

Définition 1 (Union, intersection) — Lorsqu'on dispose de deux ensembles A et B, on peut considérer :

- Leur **union**, notée $A \cup B$: c'est l'ensemble des éléments qui appartiennent **à** A **ou à** B.
  $x \in A \cup B$ signifie $x \in A$ **ou** $x \in B$.



- Leur **intersection**, notée $A \cap B$: c'est l'ensemble des éléments qui appartiennent **à** A **et à** B.
  $x \in A \cap B$ signifie $x \in A$ **et** $x \in B$.

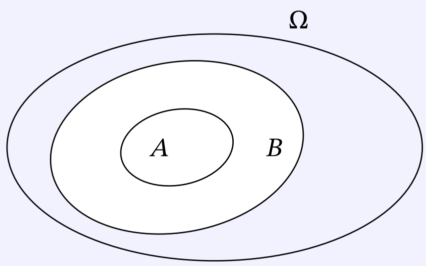


☞ **Exemple 1** On suppose que $A = \{1; 2; 3\}$ et que $B = \{0; 2; 3\}$. Alors :

- $A \cup B =$
- $A \cap B =$

Définition 2 (Inclusion) —

On dit qu'un ensemble A est **inclus** dans un ensemble B si tous les éléments de A sont des éléments de B.
On note $A \subset B$ (« A est inclus dans B ») ou $B \supset A$ (« B contient A »). A est alors une **partie** de B.



☞ **Exemple 2** Soit $A = [0; 1]$ et $B = [0; +\infty[$. A-t-on $A \subset B$?

Même question avec $A = \{2; 3\}$ et $B = \{1; 2\}$.

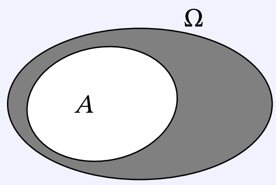
Définition 3 (Parties d'un ensemble) — Si Ω est un ensemble, on note $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des parties de Ω.

☞ **Exemple 3** Soit $\Omega = \{1;2;3\}$. Décrire $\mathcal{P}(\Omega)$.

6.1.2 Complémentaire, partitions, cardinal

Définition 4 (Complémentaire) —

Soit Ω un ensemble et A une partie de Ω.
On note $\overline{A}$ le **complémentaire de** A **dans** Ω.
C'est **l'ensemble des éléments qui appartiennent à** Ω **et pas à** A.



☞ **Exemple 4** Si $\Omega = \{1;2;3\}$ et que $A = \{2\}$ alors

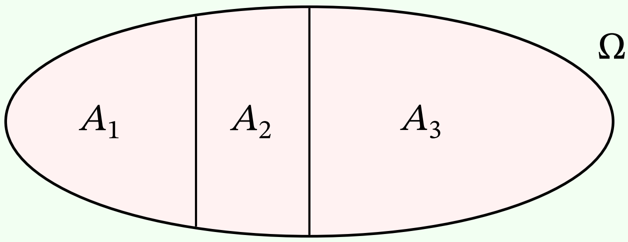
Définition 5 (Partition) — Soit Ω un ensemble. Une **partition** de Ω est un ensemble de parties de Ω, (notées ici $A_1, A_2, ..., A_n$) qui sont **disjointes deux à deux** et tel que **leur réunion est** Ω.

- Les parties sont disjointes deux à deux : pour tous i et j de $\{1,...,n\}$: $i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \varnothing$
- $\Omega = A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n = \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$, c'est-à-dire que pour tout élément x appartenant à E, il existe i tel que $x \in A_i$, ou encore : la réunion des parties A_i recouvre Ω.

☞ **Exemple 5**

Si $\Omega = \{1;2;3;4;5;6;7;8;9;10\}$ et si
- $A_1 = \{1,2\}$,
- $A_2 = \{3,5\}$,
- $A_3 = \{4;6;7;8;9;10\}$,

alors A_1, A_2, et A_3 forment une partition de Ω.



Définition 6 (Cardinal) — Soit Ω un ensemble **fini**. Le nombre d'éléments de Ω est appelé son **cardinal** et est noté $|\Omega|$ ou **Card(Ω)**, ou encore $\#\Omega$.

☞ **Exemple 6** Si $\Omega = \{13;15;28;55\}$ alors

II Expériences aléatoires

6.2.1 Issues, univers

Définition 7 (Expérience aléatoire) — Une expérience aléatoire est une expérience où les résultats possibles (les **issues**) sont des éléments d'un ensemble Ω (**l'univers** ou **l'univers des possibles**), et où on ne sait pas avec certitude quelle issue parmi l'univers Ω va se produire.

En seconde, les ensembles Ω seront toujours finis.

☞ **Exemple 7**
- On lance un dé à six faces et on note le numéro de la face supérieure.

- On lance une pièce de monnaie et on regarde si on tombe sur pile ou face.

6.2.2 Événements

On se place dans le cadre d'un lancer de deux dés à six faces, et on note la somme obtenue.

L'univers est $\Omega = \{2;3;4;5;6;7;8;9;10;11;12\}$.

Le tableau ci-dessous définit le vocabulaire relatifs aux **évènements** en probabilité :

Vocabulaire	Signification	Illustration
Événement	Partie de l'univers Ω	Obtenir un nombre pair : $A = \{2;4;6;8;10;12\}$ Obtenir un multiple de 3 : $B = \{3;6;9;12\}$ Obtenir une somme supérieure à 10 : $C = \{10;11;12\}$ Obtenir une somme inférieure à 6 : $D = \{2;3;4;5;6\}$
Événement élémentaire	Issue de Ω	Obtenir 7 : $\omega = \{7\}$
Événement impossible	Événement qui ne se produit jamais	Obtenir 13 : $\varnothing$
Événement certain : on le note Ω	C'est un événement qui se produit toujours	Obtenir entre 2 et 12 : Ω
Événement « A et B »	C'est l'événement constitué des issues communes à A et B	$A \cap B = \{6;12\}$
Événement « A ou B »	C'est l'événement constitué des issues de A et de B	$A \cup B = \{2;3;4;6;8;9;10;12\}$
Événements incompatibles	Ce sont deux événements qui n'ont aucune issue commune.	$C \cap D = \varnothing$ donc C et D sont incompatibles.
Événements contraires	Ce sont deux événements incompatibles dont la réunion est Ω	$\overline{A}$ est l'événement incompatible avec A : c'est le fait d'obtenir un nombre impair. On a : • $A \cap \overline{A} = \varnothing$ (aucun nombre n'est pair et impair) • $A \cup \overline{A} = \Omega$ (le résultat est soit pair, soit impair)

III Loi de probabilité

6.3.1 Cas général

Définition 8 (Loi de probabilité) — Soit $\Omega = \{\omega_1;\omega_2;...;\omega_n\}$ l'univers d'une expérience aléatoire. Définir une loi de probabilité $\mathbf{P}$ sur cet univers, c'est associer à chaque issue ω_i un nombre p_i entre 0 et 1, tel que :

- $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = p_1 + p_2 + ... + p_n = 1$ (la somme des probabilités des issues vaut 1).
- la probabilité d'un événement A, notée $\mathbf{P}(A)$, est la somme des probabilités des issues qui composent A.

☞ **Exemple 8** On considère l'expérience aléatoire suivante : dans un sac sont contenues 10 boules indiscernables au toucher. 5 sont noires, 4 sont vertes et 1 seule est rouge.
On tire au hasard une boule du sac.

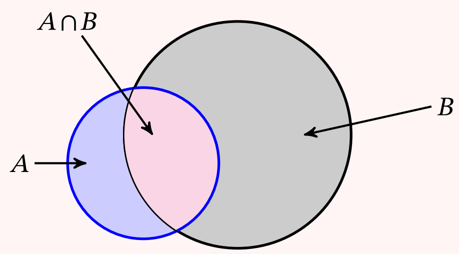
- Les évènements qu'on considère sont sont N (on tire une boule noire), V (on tire une boule verte) et R (on tire une boule rouge).
- L'univers est $\Omega = \{b_1, b_2, b_3, \ldots, b_{10}\}$ où b_i est l'évènement élémentaire «on tire la boule numéro i ».
- La probabilité de tirer chaque boule individuellement est $\frac{1}{10}$, c'est la probabilité d'un événement élémentaire.
-
-
-

Proposition 6.1 (Probabilité de l'union et du complémentaire) —

Illustration :

Soient A et B deux événements de Ω. On a :

-
-



6.3.2 Cas d'équiprobabilité

Définition 9 (Équiprobabilité) — Lorsque toutes les issues d'un univers ont même probabilité, on parle d'équiprobabilité.

Proposition 6.2 (Calcul de probabilité, cas équiprobable) — *On considère un univers $\Omega = \{\omega_1; \omega_2; \ldots; \omega_n\}$, et on se place dans le cas d'équiprobabilité. Alors :*

-
-

☞ **Exemple 9** Lorsqu'on lance un dé non truqué à six faces, il y a équiprobabilité des 6 issues. Si on note A l'événement « obtenir un nombre pair », on a :

De même, si on considère l'événement B « obtenir un nombre inférieur à 2 », on a $B = \{1; 2\}$ donc $|B| = 2$ et :

IV Arbres de probabilité

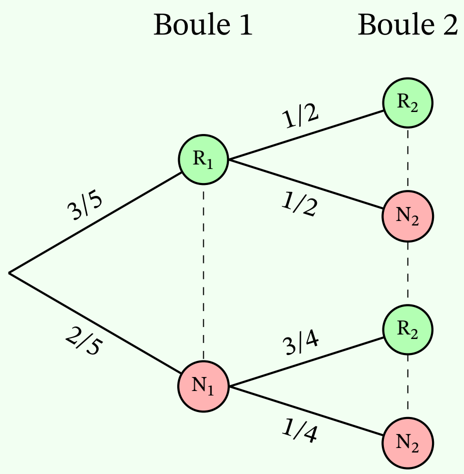
Proposition 6.3 (Règles de calculs sur les arbres pondérés, admis) —

-
-
-

☞ **Exemple 10** On considère une urne qui contient exactement 5 boules : 3 boules rouges et deux boules noires. On effectue successivement et sans remise deux tirages au hasard d'une boule dans l'urne. On note les évènements :

- R_1 : « la première boule tirée est rouge ».
- R_2 : « la seconde boule tirée est rouge ».

On note N_1 et N_2 les évènements respectifs «la première boule tirée est noire »et «la seconde boule tirée est noire ».



V Echantillonage

Théorème 6.4 (Loi des grands nombres, admis) — *Pour une expérience aléatoire donnée qu'on répète n fois, les distributions de fréquences des caractères calculées sur ces séries de taille n « se rapprochent » de la loi de probabilité des caractères.*

Proposition 6.5 (Intervalle de fluctuation, admis) — *On considère une population où il y a une proportion p d'individus ayant un caractère donné, et on observe un échantillon de taille n dans cette population. On note f la fréquence du caractère dans cet échantillon.*

Si $n \geqslant 25$; $0{,}2 \leqslant p \leqslant 0{,}8$, alors la probabilité que f appartienne à l'intervalle $I = \left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}; p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ est d'environ 95%.

*I est alors appelé **l'intervalle de fluctuation au seuil de** 95% de la fréquence f.*

☞ **Exemple 11** Une urne contient 4 boules vertes et 6 boules rouges. On tire au hasard et avec remise 80 boules dans cette urne et on s'intéresse à la fréquence de boules vertes tirées dans cet échantillon.
D'après la propriété ci-dessus, l'intervalle de fluctuation de cette fréquence est
$\left[0{,}4 - \frac{1}{\sqrt{80}}; 0{,}4 + \frac{1}{\sqrt{80}}\right] \approx [0{,}29; 0{,}51]$
Cela signifie que la probabilité que la fréquence de boules vertes observées dans les 80 tirages soit comprise entre 29% et 51% est d'environ 95%.

VI Exercices

♦ **PROB.1** On jette un dé dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on s'intéresse au numéro apparaissant sur la face supérieure.

1) Décrire l'ensemble Ω, univers associé à cet expérience aléatoire.

2) Écrire sous forme d'une partie (d'ensembles) de Ω les évènements :
- A : « Obtenir un numéro inférieur ou égal à deux »
- B : « Obtenir un numéro impair »
- C : « Obtenir un numéro strictement supérieur à quatre »

3) Pour chacun des évènements suivants, les écrire sous forme de parties de Ω et les décrire par une phrase la plus simple possible :

- $A\cup B$
- $A\cap B$
- $A\cup C$
- $A\cap B$
- $C\cup B$
- $C\cap B$
- $\overline{A}$
- $\overline{A}\cup C$
- $\overline{A}\cap C$
- $\left(\overline{A\cap C}\right)\cup\left(\overline{B\cap A}\right)$

♦ **PROB.2** On choisit au hasard une carte dans un jeu de 52 cartes.

1) Combien y a-t-il d'issues possibles ?

2) On considère les évènements :
- A : « Obtenir un as »
- P : « Obtenir une reine »

3) Combien y a-t-il d'issues dans A ?

4) Combien y a-t-il d'issues dans P ?

5) Traduire par une phrase les évènements $A\cup P$ et $A\cap P$.

6) Déterminer $|A\cup P|$ et $|A\cap P|$.

♦ **PROB.3** Deux lignes téléphonique arrivent à un standard.

On note :
- E_1 : « La ligne A est occupée »
- E_2 : « La ligne B est occupée. »

Après une étude, on admet que l'on a :
- $p(E_1)=0{,}5$
- $p(E_2)=0{,}6$
- $p(E_1\cap E_2)=0{,}3$

1) Calculer la probabilité que la ligne A soit libre.

2) Calculer la probabilité qu'une ligne au moins soit occupée.

3) Calculer la probabilité qu'une ligne au moins soit libre.

♦ **PROB.4** E est l'ensemble des nombres de 1 à 20 inclus. On choisit au hasard un de ces nombres.

1) Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :
- A : « Il est un multiple de deux. »
- B : « Il est un multiple de quatre. »
- C : « Il est un multiple de cinq. »
- D : « Il est un multiple de deux mais pas de quatre. »

2) Que peut-on affirmer pour les évènements A et B ? Expliquer.

3) Que peut-on affirmer pour les évènements A et C ? Expliquer.

4) Calculer la probabilité de $A\cap C$.

5) Calculer la probabilité de D puis celle de $\overline{D}\cap C$.

♦ **PROB.5** Un couple de futurs parents décide d'avoir trois enfants. On fait l'hypothèse qu'ils auront, à chaque fois, 60% de chances d'avoir un garçon et 40% de chances d'avoir une fille et qu'il n'y aura pas de jumeaux. Calculer la probabilité des évènements suivants :
- A : « Ils auront trois filles. »
- B : « Ils auront trois enfants de même sexe. »
- C : « Ils auront au plus une fille. »
- D : « Les trois enfants seront de sexe différents. »

♦ **PROB.6** Un club propose deux types d'activité : le sport en compétition et le sport en loisir.

Des tarifs différents sont proposés selon que l'on est adulte (plus de 18 ans) ou jeune.

Le nombre d'adhérents du club est 900 et on sait que :
- 567 ont choisi le sport-loisir et parmi eux 234 sont adultes.
- 270 jeunes ont choisi la compétition.

1) Compléter le tableau ci-dessous.

	Sport-loisir	Compétition	Total
Adultes			
Jeunes			
Total			900

2) On choisit un adhérent du club et on appelle C l'évènement : « L'adhérent a choisi la compétition » et A l'évènement : « L'adhérent est un adulte ».

a) Quel est l'univers de cette expérience ? Quelle est la loi de probabilité ?

b) Calculer les probabilités des évènements A et C.

c) Décrire par une phrase les évènements suivants : $\overline{A}$, $A \cap C$, $A \cup C$.

d) Calculer la probabilité de chacun des évènements de la question précédente.

3) On choisit un adhérent parmi les adultes. Quelle est la probabilité p_1 qu'il ait choisi la compétition ?

4) On choisit un adhérent parmi ceux qui ont choisi la compétition. Quelle est la probabilité p_2 qu'il s'agisse d'un adulte ?

♦ **PROB.7** Une urne contient 15 jetons : 5 sur lesquels est écrit la lettre A, 6 sur lesquels est écrit la lettre B et 4 sur lesquels est écrit la lettre C. On tire au hasard un jeton de l'urne puis, sans le remettre dans l'urne, on en tire un second. Un résultat de l'expérience est un « mot » de deux lettres (par exemple BA).

1) Modéliser l'expérience par un arbre pondéré.

2) Calculer la probabilité des évènements suivants :

E : « On obtient deux lettres identiques. »

F : « On obtient au moins une fois la lettre B. »

G : « On obtient deux consonnes. »

H : « On obtient une voyelle en premier ou une consonne en deuxième. »

♦ **PROB.8** En 2017, 28% des foyers français possèdent un chat.

1) Programmer dans la calculatrice la fonction **chat** en langage Python qui simule l'expérience consistant à tirer un hasard un foyer français et qui retourne 1 si ce foyer possède un chat, 0 sinon.

```
from random import *

def chat():
    d=uniform(0,1)
    if d<0.28:
        return(1)
    else:
        return(0)
```

2) Le programme ci-dessous incomplet de la fonction **Repchat** simule n fois l'expérience précédente.
Recopier et compléter ce programme pour que la fonction **Repchat** retourne le nombre de foyers français possédant un chat dans l'échantillon issu de la simulation.

```
from random import *

def Repchat():
    s=...
    for k in range(1,n+1):
        s=s+...
    return(...)
```

♦ **PROB.9** On estime que, dans le monde entier, 8% des personnes ont les yeux bleus. On considère l'expérience qui consiste à choisir au hasard une personne dans le monde et à noter si elle a ou non les yeux bleus.

1) Écrire en langage Python une fonction **ybleus** qui simule cette expérience.

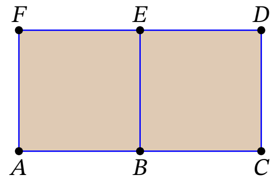
2) Écrire en langage Python une fonction **echant** d'argument un entier n qui réalise un échantillon de taille n de l'expérience et qui retourne la fréquence f des personnes aux yeux bleus dans cet échantillon.

3) Recopier et compléter le programme de la fonction **Nechant** d'arguments N et n, qui simule N échantillons de taille n de l'expérience et qui renvoie la proportion des échantillons pour lesquels l'écart entre 0,08 et f est inférieur à $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

```
from random import *

def Nechant(N,n):
    c=0
    for i in range(...):
        f=echant(...)
        if abs(f-0.08)<1/sqrt(n):
            c=c+1
    return(...)
```

♦ **PROB.10** Une fourmi se déplace sur la quadrillage ci-dessous en partant du sommet A. À chaque étape, elle emprunte au hasard une arête pour changer de sommet.



On regarde la position de la fourni après trois étapes.

1) À l'aide d'un arbre de probabilités, déterminer tous les trajets possibles de la fourmi.

2) Quelle est la probabilité que la fourmi se retrouve en A ?

3) Quelle est la probabilité que la fourmi se retrouve en D ?

4) Quelle est la probabilité que la fourmi se retrouve en B sans s'être déplacée deux fois sur la même arête ?