☞ **Correction exercice 1 :**

**Partie A**

**1) a)** La fonction $f$ est continue et dérivable sur $[0\ ;\ 10]$. En utilisant les règles de dérivation d'un produit, on obtient :
$f'(t) = 3\mathrm{e}^{-0,5t+1} + 3t \times -0,5\mathrm{e}^{0,5t+1} = \mathrm{e}^{-0,5t+1}(+ - 3(0,5t+1)) = (-1,5t+3)\mathrm{e}^{-0,5t+1}$
Donc $\forall t \in [0\ ;\ 10]$, $f'(t) = 3(-0,5t+1)\mathrm{e}^{-0,5t+1}$

**b)** $\forall t \in [0\ ;\ 10]$, $\mathrm{e}^{-0,5t+1} > 0$ donc $f'(t)$ a le même signe que $-0,5t+1$.
$-0,5t+1 \geqslant 0 \iff x \leqslant 2$.
Dans le tableau : $f(0) = 0$, $f(2) = 6\mathrm{e}^0 = 6$ et $f(10) = 30\mathrm{e}^{-5+1} = 30\mathrm{e}^{-4}$.
D'où le tableau de variation de $f$ :

| $x$ | $0$ | | $2$ | | $10$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $0$ | $\nearrow$ | $6$ | $\searrow$ | $30\mathrm{e}^{-4}$ |

**c)** Le maximum de la fonction $f$ est atteint pour $t = 2$, et $f(2) = 6$. La dose maximale de 6 mg sera atteinte au bout de 2 heures.

**2) a)** Sur l'intervalle $[0\ ;\ 2]$, la fonction $f$ est continue et strictement croissante à valeurs dans $[0\ ;\ 6]$. Or $5 \in [0\ ;\ 6]$, donc d'après le corollaire du TVI (théorème des valeurs intermédiaires), l'équation $f(t) = 5$ admet une unique solution, notée $\alpha$, dans l'intervalle $[0\ ;\ 2]$.
À la calculatrice, $\alpha \approx 1,02$.

**b)** D'après le tableau de variations, $f(t) \geqslant 5 \iff t \in [\alpha\ ;\ \beta]$. De plus $\beta - \alpha = 2,44$ (heures).
Donc le traitement sera efficace pendant 2,44 heures soit environ 146 minutes.

**Partie B**

**1)** Au bout d'une heure, la quantité de médicament dans le sang diminue de 30 %, donc il en reste 70 %. Puis on en injecte à nouveau 1,8 mg. Sachant que $u_0 = 2$, alors $u_1 = 0,70 \times 2 + 1,8 = 3,2$. Au bout d'une heure, la quantité de médicament dans le sang sera de 3,2 mg.

**2)** Soi $n \in \mathbf{N}$. $u_n$ désigne la quantité de médicament dans le sang au bout de $n$ heures. Une heure plus tard, il ne restera que 70 % de la quantité précédente (70 % de $u_n$), puis on en ajoute 1,8 mg par injection.
Donc $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = 0,7 \times u_n + 1,8$.

**3) a)** Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_n \leqslant u_{n+1} < 6$.
*Initialisation :* $u_0 = 2$ et $u_1 = 3,2$. Donc $u_0 \leqslant u_1 < 6$. L'initialisation est vérifiée.
*Hérédité :* on suppose que si $n \in \mathbf{N}$, alors $u_n \leqslant u_{n+1} < 6$.
Montrons que $u_{n+1} \leqslant u_{n+2} < 6$.
$u_n \leqslant u_{n+1} < 6 \iff 0,7 \times u_n \leqslant 0,7 \times u_{n+1} < 0,7 \times 6 \iff 0,7u_n \leqslant 0,7u_{n+1} < 4,2$
donc $0,7u_n + 1,8 \leqslant 0,7u_{n+1} + 1,8 < 4,2 + 1,8 \iff 0,7u_n + 1,8 \leqslant 0,7u_{n+1} + 1,8 < 6$.
Donc $u_{n+1} \leqslant u_{n+2} < 6$. L'hérédité est démontrée.
*Conclusion :* La proposition est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang $n$, elle l'est aussi au rang $n+1$.
La proposition est donc initialisée au rang $n = 0$ et héréditaire, d'après le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_n \leqslant u_{n+1} < 6$.

**b)** Nous venons de montrer que $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_n \leqslant u_{n+1} < 6$. Cela signifie que la suite $(u_n)$ est croissante et majorée par 6. Donc d'après le théorème de convergence monotone, la suite $(u_n)$ converge vers une limite finie notée $\ell$.

**c)** La suite $(u_n)$ converge vers $\ell$ donc $\ell$ est l'unique solution de l'équation $\ell = 0,7\ell + 1,8$ (thérème du point fixe).
$l = 0,7l + 1,8 \iff 0,3l = 1,8 \iff l = 6$. Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 6$

**4)** On considère la suite $(v_n)$ définie pour tout entier naturel $n$ par $v_n = -u_n + 6$.

**a)** $\forall n \in \mathbf{N}$, $v_{n+1} = -u_{n+1} + 6 = -(0,7 \times u_n + 1,8) + 6 = -0,7u_n + 4,2 = 0,7\left(-u_n + \dfrac{4,2}{0,7}\right)$
$= 0,7(-u_n + 6) = 0,7v_n$.
Donc $\forall n \in \mathbf{N}$, $v_{n+1} = 0,7n_n$ donc la suite $(v_n)$ est géométrique de raison 0,7 et de premier terme $v_0 = -u_0 + 6 = 4$.

**b)** $\forall n \in \mathbf{N}$, $v_n = v_0 \times q^n = 4 \times 0,7^n$.
De plus $\forall n \in \mathbf{N}$, $v_n = -u_n + 6$ donc $u_n = -v_n + 6 = 6 - 4 \times 0,7^n$.

**c)** $u_n \geqslant 5,5 \iff 6 - 4 \times 0,7^n \geqslant 5,5 \iff -4 \times 0,7^n \geqslant -0,5 \iff 0,7^n \leqslant \dfrac{-0,5}{-4}$

$\iff \ln\left(0,7^n\right) \leqslant \ln\left(\dfrac{1}{8}\right) \iff n \times \ln(0,7) \leqslant -\ln(8) \iff n \geqslant -\dfrac{\ln(8)}{\ln(0,7)}$ car $\ln(0,7) < 0$

Donc $n \geqslant -\dfrac{2\ln(2)}{\ln(0,7)}$. À la calculatrice : $-\dfrac{2\ln(2)}{\ln(0,7)} \approx 5,83$ donc $n \geqslant 6$.
Cela signifie que $u_6 \geqslant 5,5$. Il faudra donc au total 7 injections (de l'injection initiale $u_0$ à la 7e qui correspond à $u_6$).

**Correction exercice 2 :**

**1) a)** La droite $\mathcal{D}$ dont une représentation paramétrique est $\left\{\begin{array}{lll} x & = & 1+2t \\ y & = & 2-t \\ z & = & 2+2t \end{array}\right.$ $,t \in \mathbf{R}$ a pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

**b)** Si $B$ appartient à la droite $\mathcal{D}$ alors $\exists t \in \mathbf{R}$ tel que :

$$\left\{\begin{array}{lll} -1 & = & 1+2t \\ 3 & = & 2-t \\ 0 & = & 2+2t \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lll} 2t & = & -2 \\ -t & = & 1 \\ 2t & = & -2t \end{array}\right. \iff t=-1. \text{ Donc } B \in \mathcal{D}.$$

**c)** On a $A(-1\,;\,1\,;\,3)$ et $B(-1\,;\,3\,;\,0)$. Donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Alors $\overrightarrow{AB}.\vec{u} = 0\times 2 + 2\times(-1) + (-3)\times 2 = -8$

**2) a)** Le plan $\mathcal{P}$ passant par $A$ est orthogonal à la droite $\mathcal{D}$. Donc $\mathcal{P}$ a pour vecteur normal le vecteur $\vec{u}$ (vecteur directeur de $\mathcal{D}$).
Son équation cartésienne sera de la forme $ax+by+cz+d=0$, où $(a\,;\,b\,;\,c)$ sont les cordonnées d'un vecteur normal au plan.
En prenant comme vecteur normal à $\mathcal{P}$ le vecteur $\vec{u}$, on obtient : $\mathcal{P}$ :
$2x-y+2z+d=0$. Or $A \in \mathcal{P}$ donc $-2-1+6+d=0$ donc $d=-3$. Donc $\mathcal{P}$ a pour équation $2x-y+2z-3=0$

**b)** Le projeté orthogonal de $A$ sur la droite $\mathcal{D}$, noté $H$, est l'unique point d'intersection de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$. Résolvons donc le système suivant :

$\left\{\begin{array}{lll} 2x-y+2z-3 & = & 0 \\ x & = & 1+2t \\ y & = & 2-t \\ z & = & 2+2t \end{array}\right.$. On remplace $x$, $y$ et $z$ dans la première équation :

$2x-y+2z-3=0 \iff 2(1+2t)-(2-t)+2(2+2t)-3=0 \iff$
$2+4t-2+t+4+4t=0 \iff 9t+1=0 \iff t=-\frac{1}{9}$.

On remplace la valeur de $t$ dans les trois dernières équations :

$\left\{\begin{array}{lll} x & = & 1+2\times -\frac{1}{9} = \frac{7}{9} \\ y & = & 2-\left(-\frac{1}{9}\right) = \frac{19}{9} \\ z & = & 2+2\times\left(-\frac{1}{9}\right) = \frac{16}{9} \end{array}\right.$. Donc $H\left(\frac{7}{9}\,;\,\frac{19}{9}\,;\,\frac{16}{9}\right)$.

**c)** Déterminons les coordonnées de $\overrightarrow{AH}$ avec $A(-1\,;\,1\,;\,3)$ et $H\left(\frac{7}{9}\,;\,\frac{19}{9}\,;\,\frac{16}{9}\right)$ : $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix} \frac{16}{9} \\ \frac{10}{9} \\ -\frac{11}{9} \end{pmatrix}$.

Donc $\left\|\overrightarrow{AH}\right\| = \sqrt{\left(\frac{16}{9}\right)^2+\left(\frac{10}{9}\right)^2+\left(-\frac{11}{9}\right)^2} = \frac{\sqrt{477}}{9} = \frac{\sqrt{53}}{3}$

**3) a)** Les points $H$ et $B$ appartiennent à $\mathcal{D}$, donc le vecteur $\overrightarrow{HB}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$, tout comme $\vec{u}$. Donc les vecteurs $\overrightarrow{HB}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires donc $\exists k \in \mathbf{R}$ tel que
$\overrightarrow{HB} = k\times\vec{u}$.

**b)** D'après les propriétés du produit scalaire, et en utilisant la relation de Chasles,
$\overrightarrow{AB}.\vec{u} = \left(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HB}\right).\vec{u} = \overrightarrow{AH}.\vec{u} + \overrightarrow{HB}.\vec{u}$.
Or les points $A$ et $H$ appartiennent au plan $\mathcal{P}$ normal à la droite $\mathcal{D}$, donc tout vecteur de $\mathcal{P}$ est orthogonal à tout vecteur de $\mathcal{D}$ donc $\overrightarrow{AH} \perp \vec{u}$ donc $\overrightarrow{AH}.\vec{u}=0$.
Donc $\overrightarrow{AB}.\vec{u} = \overrightarrow{HB}.\vec{u} = k\times\vec{u}.\vec{u} = k\,\vec{u}^2 = k\,\|\vec{u}\|^2$ donc $k = \frac{\overrightarrow{AB}.\vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}$.

**c)** On a $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ donc $\|\vec{u}\| = \sqrt{2^2+(-1)^2+2^2} = \sqrt{9} = 3$ et $\overrightarrow{AB}.\vec{u} = -8$ donc
$k = \frac{-8}{3^2} = -\frac{8}{9}$.

Donc en posant $H(x\,;\,y\,;\,z)$ et $B(-1\,;\,3\,;\,0)$ alors $\overrightarrow{HB}\begin{pmatrix} -1-x \\ 3-y \\ -z \end{pmatrix}$.

De plus $\overrightarrow{HB} = k\times\vec{u} = -\frac{8}{9}\times\vec{u}$ donc $\left\{\begin{array}{lll} -1-x & = & -\frac{8}{9}\times 2 \\ 3-y & = & -\frac{8}{9}\times(-1) \\ -z & = & -\frac{8}{9}\times 2 \end{array}\right.$

Donc $x = \frac{16}{9} - 1 = \frac{7}{9}$, $y = 3 - \frac{8}{9} = \frac{19}{9}$ et $z = \frac{16}{9}$. On retrouve les coordonnées du point $H$.

**4)** Les points $A$, $H$ et $C$ appartiennent au plan $\mathcal{P}$. $H$ est le projeté orthogonal de B sur $\mathcal{P}$. Le tétraèdre $BAHC$ a pour base le triangle $AHC$ et pour hauteur $BH$.

Donc $\mathcal{V}_{BAHC} = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{AHC} \times BH$ d'où $\mathcal{A}_{AHC} = \frac{3 \times \mathcal{V}_{BAHC}}{BH}$.

D'après la question **3. c**, $\overrightarrow{HB} = k \times \vec{u} =$ donc $\overrightarrow{HB} \begin{pmatrix} \frac{16}{9} \\ -\frac{8}{9} \\ \frac{16}{9} \end{pmatrix}$ donc

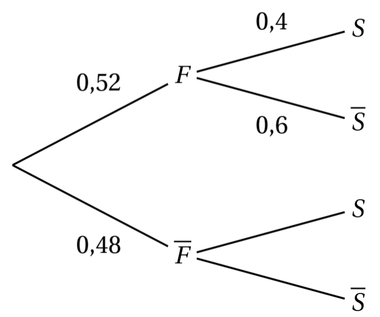
$$HB = \sqrt{\left(\frac{16}{9}\right)^2 + \left(-\frac{8}{9}\right)^2 + \left(\frac{16}{9}\right)^2} = \frac{8}{3}$$

Donc $\mathcal{A}_{AHC} = \dfrac{3 \times \frac{8}{9}}{\frac{8}{3}} = 1$ unité d'aire.

☞ **Correction exercice 3 :**

**1) a)** L'énoncé nous indique que ce stage a été suivi par 25 % des salariés. Donc $p(S) = 0{,}25$.

**b)** L'arbre complété avec les valeurs disponibles :




**c)** On calcule $\mathbf{P}(F \cap S)$ : $\mathbf{P}(F \cap S) = \mathbf{P}_S(F) \times \mathbf{P}(S) = 0{,}4 \times 0{,}52 = 0{,}208$

**d)** On cherche calculer $\mathbf{P}_S(F)$. D'après la formule de Bayes,

$\mathbf{P}_S(F) = \dfrac{\mathbf{P}(F \cap S)}{\mathbf{P}(S)} = \dfrac{0{,}208}{0{,}25} = 0{,}832$

**e)** Appliquons la formule des probabilités totales : $\mathbf{P}(S) = \mathbf{P}(S \cap F) + \mathbf{P}(S \cap \overline{F})$.

Donc $\mathbf{P}\left(S \cap \overline{F}\right) = \mathbf{P}(S) - \mathbf{P}(S \cap F) = 0{,}25 - 0{,}208 = 0{,}042$.

Avec la formule de Bayes : $\mathbf{P}_{\overline{F}}(S) = \frac{\mathbf{P}(S \cap \overline{F})}{\mathbf{P}(\overline{F})} = \dfrac{0{,}042}{0{,}48} = 0{,}0875 < 0{,}1$.

L'affirmation du directeur est donc exacte.

**2) a)** Il s'agit là d'un schéma de Bernoulli : la répétition de 20 expériences aléatoires n'ayant que deux issues, identiques et indépendantes entre elles. $X$ est la variable aléatoire qui compte les succès. $X$ suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0{,}25$ : $X \sim \mathcal{B}(20\,;\,0{,}25)$

**b)** $\mathbf{P}(X = 5) = \dbinom{20}{5} \times 0{,}25^5 \times (1 - 0{,}25)^{20-5} \approx 0{,}202$.

La probabilité qu'exactement 5 salariés suivent le stage est d'environ 0,202.

**c)** « proba(5) » calcule pour $k$ allant de 0 à 5, la somme des probabilités $p(X = k)$,
À la calculatrice, $\mathbf{P}(X \leqslant 5) \approx 0{,}617$.
Cela signifie que la probabilité qu'au plus 5 salariés aient effectué le stage, est égale à 0,617.
La probabilité qu'au moins 6 salariés suivent le stage est d'environ 0,617.

**d)** $\mathbf{P}(X \geqslant 6) = 1 - \mathbf{P}(X < 6) = 1 - \mathbf{P}(X \leqslant 5) \approx 1 - 0{,}617 \approx 0{,}383$

**3)** • Premier exemple : supposons qu'il y ait 25 salariés à 1 000 € et 75 à 1 200 €, les premiers ayant fait le stage.

Le salaire moyen est égal à $\dfrac{25 \times 1\,000 + 75 \times 1\,200}{100} = 1\,150$ €.

Après augmentation le salaire moyen passe à :

$\dfrac{25 \times 1\,000 \times 1{,}05 + 75 \times 1\,200 \times 1{,}02}{100} = 1\,180{,}50$ €.

L'augmentation moyenne est donc égale à $\dfrac{1\,180{,}5}{1\,150} \approx 1{,}0265$, soit une augmentation d'environ 2,65 %.

• Deuxième exemple : supposons qu'il y ait 25 salariés à 1 200 € et 75 à 1 000 €, les premiers ayant fait le stage.

Le salaire moyen est égal à $\dfrac{25 \times 1\,200 + 75 \times 1\,000}{100} = 1\,050$ €.

Après augmentation le salaire moyen passe à :

$\dfrac{25 \times 1\,200 \times 1{,}05 + 75 \times 1\,000 \times 1{,}02}{100} = 1\,080$ €.

L'augmentation moyenne est donc égale à $\dfrac{1\,080}{1\,050} \approx 1{,}0285$, soit une augmentation d'environ 2,85 %.

Conclusion : l'augmentation moyenne dépend de la répartition des salaires : on ne peut pas répondre à cette question.

☞ **Correction exercice 4 :**

**Partie A**

**1)** Comme indiqué sur la figure pour aller de A en B points de la tangente : $+1$ puis $+\frac{3}{4}$, donc coefficient directeur de $\frac{3}{4}$ et l'ordonnée à l'origine est égale à $\frac{1}{2}$.

$M(x\,;\,y) \in \mathcal{T} \iff y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$.

**2)** La fonction semble être convexe sur $]-\infty\,;\,0]$ et concave sur $[0\,;\,+\infty[$.

**Partie B**

**1)** En posant $u(x) = 1 + \mathrm{e}^{-3x}$, on a pour tout réel $u'(x) = -3\mathrm{e}^{-3x}$.

De $f(x) = \dfrac{1}{u(x)}$, on a donc $f'(x) = -\dfrac{u'(x)}{u(x)^2} = -\dfrac{-3\mathrm{e}^{-3x}}{\left(1+\mathrm{e}^{-3x}\right)^2} = \dfrac{3\mathrm{e}^{-3x}}{\left(1+\mathrm{e}^{-3x}\right)^2}$.

**2)** On a pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\mathrm{e}^{-3x} > 0$, donc $1+\mathrm{e}^{-3x} > 1 > 0$ et $\left(1+\mathrm{e}^{-3x}\right)^2 > 0$ : tous les termes de la dérivée sont supérieurs à zéro ; on a donc $f'(x) > 0$, sur $\mathbf{R}$. La fonction $f$ est strictement croissante sur $\mathbf{R}$.

**3) a)** Avec $X = -3x$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} -3x = -\infty$, d'où $\lim\limits_{X\to-\infty} \mathrm{e}^X = 0$, d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\mathrm{e}^{-3x} = 1$ et enfin $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \frac{1}{1} = 1$.

*Rem.* la droite d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de plus l'infini.

**b)** On a $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-3x} = +\infty$, puis $\lim\limits_{x\to-\infty} 1+\mathrm{e}^{-3x}$ et enfin $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-3x}} = 0$.

*Rem.* la droite d'équation $y = 0$ (l'axe des abscisses) est asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de moins l'infini.

**4)** On a $f(x) = 0{,}99 \iff \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-3x}} = 0{,}99 \iff 1 = 0{,}99\left(1+\mathrm{e}^{-3x}\right) \iff 1 = 0{,}99 + 0{,}99\mathrm{e}^{-3x} \iff 0{,}01 = 0{,}99\mathrm{e}^{-3x} \iff \dfrac{0{,}01}{0{,}99} = \mathrm{e}^{-3x} \iff \dfrac{1}{99} = \mathrm{e}^{-3x}$.

Par croissance de la fonction logarithme népérien :

$\ln\left(\dfrac{1}{99}\right) = \ln\left(\mathrm{e}^{-3x}\right) \iff \ln 1 - \ln 99 = -3x \iff -\ln 99 = -3x \iff x = \dfrac{\ln 99}{3}$ (valeur approchée à la calculatrice 1,532).

**Partie C**

**1)** Déterminer par le calcul une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.

On a $M(x\,;\,y) \in \mathcal{T} \iff y - f(0) = f'(0)(x-0)$.

- $f(0) = \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2}$ ;
- $f'(0) = \dfrac{3}{(1+1)^2} = \dfrac{3}{4}$. Donc :

$M(x\,;\,y) \in \mathcal{T} \iff y - \frac{1}{2} = \frac{3}{4}(x-0) \iff y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$.

$$f''(x) = \frac{9\mathrm{e}^{-3x}\left(\mathrm{e}^{-3x}-1\right)}{\left(1+\mathrm{e}^{-3x}\right)^3}.$$

**2)** Comme $9\mathrm{e}^{-3x} > 0$ et $\left(1+\mathrm{e}^{-3x}\right)^3 > 0$, le signe de $f''(x)$ est celui de $\mathrm{e}^{-3x} - 1$ :

- $\mathrm{e}^{-3x} - 1 = 0 \iff \mathrm{e}^{-3x} = 1 \iff -3x = \ln 1 = 0 \iff \iff x = 0$ ;
- $\mathrm{e}^{-3x} - 1 > 0 \iff \mathrm{e}^{-3x} > 1 \iff -3x > \ln 1 = 0 \iff \iff x < 0$ ;
- $\mathrm{e}^{-3x} - 1 < 0 \iff \mathrm{e}^{-3x} < 1 \iff -3x < \ln 1 = 0 \iff \iff x > 0$ ;

**3) a)** La question précédente a montré que la dérivée seconde est positive sur $]-\infty\,;\,0]$ : la fonction $f$ est convexe sur cet intervalle.

**b)** La dérivée seconde s'annule en $x = 0$ en changeant de signe, donc le point A de la courbe représentative d'abscisse 0 est le point d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}_f$.

**c)** En chacun de ses points la courbe $\mathcal{C}_f$ est convexe sur $]-\infty\,;\,0]$ donc au dessus de toutes les tangentes et en particulier en A la courbe est au dessus de la tangente en $x = 0$, donc en A, donc au dessus de $\mathcal{T}$.

De même en chacun de ses points la courbe $\mathcal{C}_f$ est concave sur $]0\,;\,+\infty]$ donc au dessous de toutes les tangentes et en particulier en A la courbe est au dessous de la tangente en $x = 0$, donc en A, donc au dessus de $\mathcal{T}$.

☞ **Correction exercice 5 :** L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$.

On considère les points

$$A(3\,;0\,;1),\qquad B(2\,;1\,;2)\quad \text{et}\quad C(-2\,;\,-5\,;\,1).$$

**1)** On considère les vecteurs $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-5\\-5\\0\end{pmatrix}$ : ces coordonnées ne sont pas proportionnelles, donc les vecteurs ne sont pas colinéaires; les trois points A, B et C définissent donc un plan noté (ABC).

**2)** On a $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(-1)\times(-5)+1\times(-5)+1\times 0=5-5+0=0$ : les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux, les droites (AB) et (AC) sont donc perpendiculaires en A et le triangle ABC est rectangle en A.

**3)** On a $A(3\,;\,0\,;\,1)\in ABC \iff -3+0-2+5=0$ égalité vraie;
$B(2\,;\,1\,;\,2)\in ABC \iff -2+1-4+5=0$ égalité vraie;
$A(-2\,;\,-5\,;\,1)\in ABC \iff 2-5-2+5=0$ égalité vraie.
Les coordonnées des points A, B et C vérifient l'équation donnée : comme il n'existe qu'un plan contenant trois points distincts non alignés une équation du plan ABC est :

$$M(x\,;\,y\,;\,z)\in ABC \iff -x+y-2z+5=0.$$

**4)** On considère le point $S(1\,;\,-2\,;\,4)$.

On sait qu'un vecteur normal au plan ABC a pour coordonnées les coefficients de $x$,$y$ et $z$ dans l'équation de ce plan. Donc on a $\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}$.

La droite $(\Delta)$ orthogonale au plan ABC a un vecteur directeur colinéaire au vecteur $\vec{n}$.
Donc $M(x\,;\,y\,;\,z)\in(\Delta)\iff \overrightarrow{SM}=t\vec{n}$, avec $t\in\mathbf{R}$, ce qui se traduit par les équations paramétriques :

$$\left\{\begin{array}{lcl}x-1&=&-t\\y-(-2)&=&1t\\z-4&=&-2t\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{lcl}x&=&1-t\\y&=&-2+t\\z&=&4-2t\end{array}\right.\quad t\in\mathbf{R}\iff M(x\,;\,y\,;\,z)\in(\Delta).$$

**5)** On appelle H le point d'intersection de la droite $(\Delta)$ et du plan (ABC).
Le point commun à la droite $(\Delta)$ et au plan ABC a ses coordonnées qui vérifient les équations de $\Delta$ et l'équation du plan, soit le système :

$$\left\{\begin{array}{lcl}x&=&1-t\\y&=&-2+t\\z&=&4-2t\\-x+y-2z+5&=&0\end{array}\right.$$

En remplaçant $x$,$y$ et $z$ dans la dernière équation par leur valeur en fonction de $t$, on obtient :
$-(1-t)+(-2+t)-2(4-2t)+5=0 \iff -1+t-2+t-8+4t+5=0 \iff 6t-6=0 \iff t=1$ On a donc $x=1-1=0$, $y=-2+1=-1$, $z=4-2=2$, soit $H(0\,;\,-1\,;\,2)$.

**6)** On a $SH^2=(0-1)^2+(-1-(-2))^2+(2-4)^2=1+1+4=6$, donc $SH=\sqrt{6}$.

**7)** On considère le cercle $\mathcal{C}$, inclus dans le plan (ABC), de centre H, passant par le point B. On appelle $\mathcal{D}$ le disque délimité par le cercle $\mathcal{C}$.
Déterminer la valeur exacte de l'aire du disque $\mathcal{D}$. On a $HB^2=(-2)^2+(-2)^2+0^2=4+4=4\times 2$, d'où $HB=2\sqrt{2}$.
L'aire du disque $\mathcal{D}$ est égale à $\mathcal{A}=\pi\times HB^2=8\pi$.

**8)** (SH) est perpendiculaire au plan ABC du disque, donc [SH] est la hauteur du cône et la base est le disque $\mathcal{D}$, donc :
$\mathcal{V}=\dfrac{8\pi\times\sqrt{6}}{3}$.

☞ **Correction exercice 6 :** Une chaîne de fabrication produit des pièces mécaniques. On estime que 4 % des pièces produites par cette chaîne sont défectueuses.

On choisit au hasard $n$ pièces produites par la chaîne de fabrication.

Le nombre de pièces produites est suffisamment grand pour que ce choix puisse être assimilé à un tirage avec remise.

On note $X$ la variable aléatoire égale au nombre de pièces défectueuses tirées.

Dans les trois questions suivantes, on prend $n=50$.

**1)** On a $p(X\geqslant 1)=1-p(X=0)=1-0{,}04^0\times 0{,}96^{50}\approx 1-0{,}129\,9\approx 0{,}870\,1$ soit 0,870 au millième près : réponse **b.**

**2)** La probabilité $p(3<X\leqslant 7)$ est égale à : $p(X\leqslant 7)-p(x\leqslant 3)\approx 0{,}999\,2-0{,}860\,9$ soit 0,138 3. Réponse **b.**

**3)** Quel est le plus petit entier naturel $k$ tel que la probabilité de tirer au plus $k$ pièces défectueuses soit supérieure ou égale à 95 %?
La calculatrice donne $k=4$, réponse **c.**
Dans les questions suivantes, $n$ ne vaut plus nécessairement 50.

**a)** Quelle est la probabilité de ne tirer que des pièces défectueuses?
Réponse **a.**

**b)** On considère la fonction Python ci-dessous. Que renvoie-t-elle?
La fonction donne le plus petit naturel $n$ tel que $1-0{,}96^n\geqslant$ x.
Réponse **a.**