☞ **Correction exercice 1 :**

1) La droite (CK) est l'ensemble des points M $(x\ ,\ y\ ,\ z)$ tels que $\overrightarrow{\text{CM}}$ et $\overrightarrow{\text{CK}}$ soient colinéaires, c'est-à-dire tels que $\overrightarrow{\text{CM}} = t.\overrightarrow{\text{CK}}$ où $t \in \mathbf{R}$.

$\overrightarrow{\text{CM}}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_M - x_C \\ y_M - y_C \\ z_M - z_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z-1 \end{pmatrix}$ et celles de $\overrightarrow{\text{CK}}$ sont $\begin{pmatrix} x_K - x_C \\ y_K - y_C \\ z_K - z_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{3}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{\text{CM}} = t.\overrightarrow{\text{CK}} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z-1 \end{pmatrix} = t.\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{3}{2} \\ -1 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{2}t \\ y = \frac{3}{2}t \\ z = -t+1 \end{cases}$$

La droite (CK) a donc pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{2}t \\ y = \frac{3}{2}t \\ y = -t+1 \end{cases} \quad (t \in \mathbf{R})$

2) Soit M(t) un point de la droite (CK) paramétrée par un réel t. Le point M a donc pour coordonnées $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\ ,\ \frac{3}{2}t\ ,\ -t+1\right)$

$$\text{OM}(t)^2 = (x_M - x_O)^2 + (y_M - y_O)^2 + (z_M - z_O)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)^2 + \left(\frac{3}{2}t\right)^2 + (-t+1)^2$$

$$= \frac{3}{4}t^2 + \frac{9}{4}t^2 + t^2 - 2t + 1 = 4t^2 - 2t + 1$$

Donc : $\text{OM}(t) = \sqrt{4t^2 - 2t + 1}$.

3) Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbf{R}$ par $f(t) = \text{OM}(t)$.

a) $f(t) = \sqrt{4t^2 - 2t + 1}$ donc $f'(t) = \dfrac{8t-2}{2\sqrt{4t^2-2t+1}}$. Remarquons que $4t^2 - 2t + 1$ ne s'annule jamais, et est même strictement positif pour tout $t \in \mathbf{R}$, donc le signe de $f'(t)$ est le signe de $8t - 2$.

t	$-\infty$		$1/4$		$+\infty$
Signe de $f'(t)$		$-$	0	$+$	
Variations de f		↘		↗	

Donc la fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $\left]-\infty\ ,\ \frac{1}{4}\right]$, et strictement croissante sur l'intervalle $\left[\frac{1}{4}\ ,\ +\infty\right[$.

b) On en déduit que f atteint son minimum pour $t = \frac{1}{4}$.

4) Le projeté orthogonal du point O sur la droite (CK) est le point M de la droite (CK) tel que la distance OM soit minimale; le point de la droite (CK) réalisant ce minimum correspond donc à $t = \frac{1}{4}$.

C'est donc le point de coordonnées $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{4}\ ,\ \frac{3}{2} \times \frac{1}{4}\ ,\ -\frac{1}{4} + 1\right)$ soit $\left(\frac{\sqrt{3}}{8}\ ,\ \frac{3}{8}\ ,\ \frac{3}{4}\right)$ est le projeté orthogonal du point O sur la droite (CK); on l'appelle H.

5) On montre que H appartient au plan (ABC).

- $\overrightarrow{\text{AK}}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} - 2\sqrt{3} \\ \frac{3}{2} - 0 \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}\sqrt{3} \\ \frac{3}{2} \\ 0-0 \end{pmatrix}$ et celles de $\overrightarrow{\text{AB}}$ sont $\begin{pmatrix} 0 - 2\sqrt{3} \\ 2-0 \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\sqrt{3} \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

  Donc $\overrightarrow{\text{AK}} = \frac{3}{4}\overrightarrow{\text{AB}}$ donc les points A, K et B sont alignés donc K $\in$ (AB).

- On a : $\left.\begin{array}{r} \text{K} \in (\text{AB}) \\ (\text{AB}) \subset (\text{ABC}) \end{array}\right\} \implies \text{K} \in (\text{ABC}) \implies (\text{CK}) \subset (\text{ABC})$

- On a : $\left.\begin{array}{r} \text{H} \in (\text{CK}) \\ (\text{CK}) \subset (\text{ABC}) \end{array}\right\} \implies \text{H} \in (\text{ABC})$

Donc H est un point du plan (ABC).
On montre que H est l'orthocentre du triangle ABC.

- $\overrightarrow{CK} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{\sqrt{3}}{8} \times \left(-2\sqrt{3}\right) + \frac{3}{8} \times 2 + \left(-\frac{1}{4}\right) \times 0 = -\frac{3}{4} + \frac{3}{4} + 0 = 0$ donc $\overrightarrow{CK} \perp \overrightarrow{AB}$ donc (CK) $\perp$ (AB).
  Comme H $\in$ (CK), on en déduit que (CH) $\perp$ (AB).
- $\overrightarrow{AH}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{8} - 2\sqrt{3} \\ \frac{3}{8} - 0 \\ \frac{3}{4} - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{15}{8}\sqrt{3} \\ \frac{3}{8} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}$ et celles de $\overrightarrow{BC}$ sont $\begin{pmatrix} 0-0 \\ 0-2 \\ 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$
  $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = -\frac{15}{8}\sqrt{3} \times 0 + \frac{3}{8} \times (-2) + \frac{3}{4} \times 1 = 0 - \frac{3}{4} + \frac{3}{4} = 0$ donc $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC}$ donc (AH) $\perp$ (BC).

(AH) et (CH) sont donc deux hauteurs du triangle (ABC) donc H est l'orthocentre de ce triangle.

6) a) On démontre que la droite (OH) est orthogonale au plan (ABC).

- On sait que $\overrightarrow{OH} \perp \overrightarrow{CK}$.
- $\overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{\sqrt{3}}{8} \times \left(-2\sqrt{3}\right) + \frac{3}{8} \times 2 + \frac{1}{4} \times 0 = -\frac{3}{4} + \frac{3}{4} + 0 = 0$ donc $\overrightarrow{OH} \perp \overrightarrow{AB}$.
- Les vecteurs $\overrightarrow{CK}$ et $\overrightarrow{AB}$ ne sont pas colinéaires donc ce sont deux vecteurs directeurs du plan (ABC).

Le vecteur $\overrightarrow{OH}$ est orthogonal à deux vecteurs directeurs du plan (ABC) donc c'est un vecteur normal au plan (ABC). Donc la droite (OH) est orthogonale au plan (ABC).

b) D'après le cours, si le vecteur $\vec{v}$ de coordonnées $(a\,,b\,,c)$ est normal à un plan $\mathcal{P}$, alors ce plan a une équation cartésienne de la forme $ax + by + cz + d = 0$.

Le vecteur $\overrightarrow{OH}$ $\left(\frac{\sqrt{3}}{8}\,,\frac{3}{8}\,,\frac{3}{4}\right)$ est un vecteur normal au plan (ABC), donc le plan (ABC) a une équation de la forme $\frac{\sqrt{3}}{8}x + \frac{3}{8}y + \frac{3}{4}z + d = 0$ c'est-à-dire $x\sqrt{3} + 3y + 6z + 8d = 0$.

On détermine la valeur de d en exprimant que le point A appartient au plan (ABC).

$$\text{A} \in (\text{ABC}) \iff x_\text{A}\sqrt{3} + 3y_\text{A} + 6z_\text{A} + 8d = 0 \iff 2\sqrt{3} \times \sqrt{3} + 3 \times 0 + 6 \times 0 + 8d = 0$$
$$\iff 6 + 8d = 0 \iff 8d = -6$$

Le plan (ABC) a pour équation : $x\sqrt{3} + 3y + 6z - 6 = 0$.

7) (CK) est une hauteur du triangle (ABC) donc l'aire de ce triangle est égale à $\frac{1}{2}$ CK $\times$ AB.

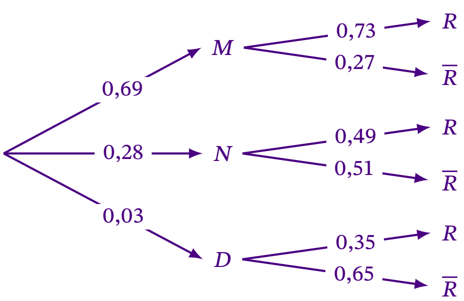
- Le vecteur $\overrightarrow{CK}$ a pour coordonnées $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,,\frac{3}{2}\,,-1\right)$ donc :
  $\overrightarrow{CK}^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + (-1)^2 = \frac{3}{4} + \frac{9}{4} + 1 = 4$ donc CK $= 2$.
- Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\left(-2\sqrt{3}\,,2\,,0\right)$ donc :
  $\overrightarrow{AB}^2 = \left(-2\sqrt{3}\right)^2 + (2)^2 + (0)^2 = 12 + 4 + 0 = 16$ donc AB $= 4$.

L'aire du triangle (ABC) est donc égale, en unités d'aire, à : $\frac{1}{2} \times 2 \times 4$ soit 4.

☞ **Correction exercice 2 :**

Partie A

1) Puisqu'on prélève au hasard un déchet, on est en situation d'équi-probabilité et les proportions sont assimilables à des probabilités. On peut donc compléter l'arbre pondéré ci-contre.



2) L'évènement « le déchet est dangereux et recyclable » est $D \cap R$.
$P(D \cap R) = P(D) \times P_D(R) = 0{,}03 \times 0{,}35 = 0{,}010\,5$.

3) $P\left(M \cap \overline{R}\right) = P(M) \times P_M\left(\overline{R}\right) = 0{,}69 \times 0{,}27 = 0{,}186\,3$.
Dans le contexte de l'exercice, cela signifie que sur l'ensemble des déchets produits par l'entreprise, 18,63 % d'entre eux sont des déchets qui sont minéraux et non recyclables.

4) Les évènements M, N et D partitionnent l'univers, donc, d'après la loi des probabilités totales, on en déduit :
$P(R) = P(R \cap M) + P(R \cap N) + P(R \cap D) = 0{,}69 \times 0{,}73 + 0{,}28 \times 0{,}49 + 0{,}03 \times 0{,}35 = 0{,}651\,4$
On obtient bien la probabilité annoncée.

5) La probabilité demandée est :
$$P_R(N) = \frac{P(R \cap N)}{P(R)} = \frac{0{,}28 \times 0{,}49}{0{,}651\,4} = \frac{686}{3\,257} \approx 0{,}210\,6 \quad \text{au dix-millième près.}$$

Partie B

1) **a)** X compte le nombre de succès dans la répétition de 20 expériences de Bernoulli, indépendantes et de même paramètre $p = 0{,}651\,4$.
C'est donc la loi binomiale $\mathcal{B}(20\,;\ 0{,}651\,4)$ que suit X.

b) On cherche la probabilité de l'évènement $(X = 14)$. On a :
$P(X = 14) = \binom{20}{14} p^{14} \times (1-p)^{20-14} = \binom{20}{14} 0{,}651\,4^{14} \times 0{,}3486^{6} \approx 0{,}1723$ au dix-millième près.

2) Dans cette question, on prélève désormais n déchets, où n désigne un entier naturel strictement positif. On note X_n la variable aléatoire qui compte le nombre de déchets recyclables dans ce nouvel échantillon. X_n suit donc la loi binomiale de paramètres $(n\,;\ 0{,}651\,4)$

a) On a $p_n = P(X_n = 0) = \binom{n}{0} p^0 (1-p)^n = (1-p)^n = 0{,}348\,6^n$.

La probabilité qu'aucun déchet ne soit recyclable sur un échantillon de n déchet est donc de $p_n = 0{,}348\,6^n$

b) À l'aide de la calculatrice, on constate que c'est à partir de 9 déchets dans l'échantillon que la probabilité qu'au moins un des déchets soit recyclable est supérieure ou égale à 0,999 9.