♦ **DS 3.1** On considère les deux nombres complexes $z_1 = 2 + 3\text{i}$ et $z_2 = -1 + 2\text{i}$.

Déterminer la forme algébrique des nombres suivants en détaillant les calculs nécessaires :

- $a = z_1 + z_2$;
- $b = z_1 z_2$;
- $c = \dfrac{1}{z_1}$;
- $d = \overline{\left(\dfrac{z_2}{z_1}\right)}$.

♦ **DS 3.2** Résoudre dans $\mathbf{C}$ les équations suivantes :

- $(E_1)\ :\ (1 + 2\text{i})\,z = 1 - 2\text{i}z$;
- $(E_2)\ :\ 2z + \overline{z} = \text{i} + 2$;
- $(E_3)\ :\ z^2 - \text{i}z = 0$.

♦ **DS 3.3** Pour tout nombre complexe z, on pose $Z = z^2 + \overline{z}(z + 2)$.

1) On suppose que la forme algébrique de z est $z = a + ib$. Déterminer, en fonction de a et b, la partie réelle et la partie imaginaire de Z.

2) a) Montrer que si z est imaginaire pur alors Z est imaginaire pur.

b) La réciproque est-elle vraie ?

3) Déterminer l'ensemble des complexes z tels que Z est réel.

4) Existe-t-il un complexe z tel que $\Re(Z) = -1$?

5) Existe-t-il un complexe z tel que $\Re(Z) < 0$?

♦ **DS 3.4** Soit z un nombre complexe qui n'est pas réel et u un complexe différent de 1. On pose

$$Z = \frac{z - u\overline{z}}{1 - u}.$$

Démontrer que Z est réel si et seulement si $u\overline{u} = 1$.

♦ **DS 3.5** On pose $j = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

1) Calculer j^2 et en déduire que $1 + j + j^2 = 0$.

2) Soit $n \in \mathbf{N}$. Calculer, selon les valeurs de n, $1 + j + j^2 + \cdots + j^n$.