♦ **DS 4.1** On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

1) Calculer $A^2 - 3A$.

2) En déduire que A est inversible et préciser son inverse.

♦ **DS 4.2** On considère les suites (r_n) et (s_n) définies par $r_0 = 0$, $s_0 = 1$ et pour tout entier naturel n,

$$\begin{cases} r_{n+1} = 3r_n + s_n \\ s_{n+1} = -2r_n \end{cases}$$

On note enfin $X_n = \begin{pmatrix} r_n \\ s_n \end{pmatrix}$.

1) Justifier que $X_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

2) Déterminer une matrice A de taille 2×2 telle que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $X_{n+1} = AX_n$.

3) Justifier qu'alors pour tout entier naturel n, $X_n = A^n X_0$.

4) On note $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Justifier que P est inversible et calculer P^{-1}.

b) Calculer PDP^{-1}.

c) Démontrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.

d) En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $A^n = \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 1 & 2^n - 1 \\ 2 - 2^{n+1} & 2 - 2^n \end{pmatrix}$.

5) Déduire des questions précédentes une expression explicite de r_n et s_n en fonction de n.