Chapitre 7 | Logarithmes

L'invention des logarithmes, en réduisant le temps passé aux calculs de quelques mois à quelques jours, double pour ainsi dire, la vie des astronomes.

Pierre-Simon Laplace (1749-1827).

I Fonction Logarithme

7.1.1 Lien avec la fonction exponentielle

La fonction exponentielle, définie de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ par $x :\mapsto \mathrm{e}^x$ est injective : chaque équation $\mathrm{e}^x = a$ où $a \in \mathbf{R}$ admet au plus une solution. En fait, on a même une **bijection** de $\mathbf{R}$ dans $]0;+\infty[$.
Cela nous permet de définir une fonction **réciproque**, définie de $]0;+\infty[$ dans $\mathbf{R}$: le **logarithme népérien**.

Définition 1 (Logarithme népérien) — Si $a > 0$, on appelle **logarithme népérien** de a (noté $\ln(a)$) l'unique nombre tel que $\mathrm{e}^{\ln(a)} = a$.
On a donc pour tout réel a strictement positif :

$$\mathrm{e}^x = a \Leftrightarrow x = \ln(a).$$

Proposition 9.1 — *On a :*

- *pour tout réel x,* $\ln(\mathrm{e}^x) = x$.
- *pour tout réel x* ***strictement positif****,* $\mathrm{e}^{\ln(x)} = x$.

7.1.2 Propriétés "graphiques" de la fonction ln

Proposition 9.2 (Fondamental, admis en partie) — *La fonction*

$$f : \begin{cases}]0;+\infty[\to \mathbf{R} \\ x \mapsto \ln(x) \end{cases}$$

est dérivable sur $]0;+\infty[$ et pour tout réel $x > 0$ on a $f'(x) = \frac{1}{x}$.

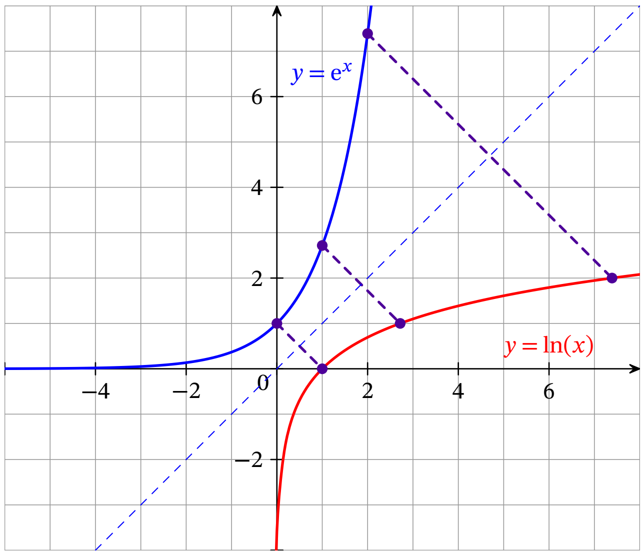
Proposition 9.3 (Variations de ln) — *La fonction* ln *est* ***strictement croissante*** *sur cet intervalle :*

x	0	$+\infty$
Signe de $\ln'(x) = \frac{1}{x}$	‖	$+$
Variations de ln	‖	$-\infty \nearrow +\infty$

Proposition 9.4 — *La droite d'équation $x = 0$ est une asymptote à la courbe de* ln.

Proposition 9.5 (Symétrie des courbes) — *Les courbes des fonctions exponentielles et logarithme népérien sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.*

Illustration :



II Propriétés algébriques

7.2.1 Ordre

Proposition 9.6 ((In)équations) — *Du fait de la stricte croissance de la fonction* ln, *pour tous réels strictement positifs x et y :*

$$\ln(x) = \ln(y) \Leftrightarrow x = y;$$

$$\ln(x) < \ln(y) \Leftrightarrow x < y.$$

7.2.2 Relation fonctionnelle

Proposition 9.7 (Relation fondamentale) — *Pour tous nombres a et b strictement positifs, on a :*

$$\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b).$$

7.2.3 Corollaires

Proposition 9.8 — *Pour tous nombres a et b strictement positifs, on a :*

- $\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln(b)$;
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$;
- $\ln(a^n) = n\ln(a)$ *où* $n \in \mathbf{Z}$;
- $\ln\left(\sqrt{a}\right) = \frac{1}{2}\ln(a)$;
- $\ln(e^n) = n$.

7.2.4 Croissances comparées

Théorème 9.9 (Croissances comparées) — *Pour tout entier $n > 0$:*

$$\lim_{x \to 0^+} x^n \ln(x) = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0.$$

Proposition 9.10 (Dérivation de $\ln(u)$) — *Si u est une fonction à valeur dans $]0;+\infty[$, dérivable, alors $\ln(u)$ est dérivable et :*

$$(\ln(u))' = \frac{u'}{u}.$$

III Exercices

♦ **LOG.1**

La fin du XVI[e] siècle est l'époque des grands voyages maritimes et de la découverte des lois régissant le mouvement des planètes (Copernic, Kepler...).
Les mesures astronomiques, nécessaires pour la navigation, impliquent des calculs compliqués. Les multiplications, divisions et extractions de racines sont particulièrement longues et pénibles.

Pour simplifier ces calculs, on cherche à construire des tables numériques à deux colonnes, mettant en correspondance les nombres de telle manière qu'à la multiplication de deux nombres de la colonne de gauche corresponde l'addition de deux nombres de la colonne de droite. La première table de ce type est publiée par l'Ecossais John Neper en 1614, après quarante ans de travail ! En voici un extrait (ci-contre).

0,1	
0,5	
1	
1,5	
2	0,69315
3	1,09861
4	1,38629
5	1,60944
6	
7	1,94591
8	
9	
10	2,30259
11	2,39790
12	2,48491
13	2,56495
14	2,63906
15	2,70805
16	2,77259
17	2,83321
18	
19	2,94444
20	
21	
22	
100	

1) Vérifier que le résultat pour 10 correspond bien à la somme des résultats pour 5 et 2.

2) En remarquant que $6 = 3 \times 2$, calculer le résultat pour 6.

3) Pour désigner les nombres de la colonne de droite on invente le mot « logarithme », forgé à partir des deux mots grecs *logos* (rapport) et *arithmos* (nombre entier naturel) : en effet si les nombres de gauche sont dans un rapport constant (c'est à dire en progression géométrique), alors ceux de droite sont à différence constante (c'est-à-dire en progression arithmétique).
Compléter le tableau pour les nombres 8, 18, 20, 21 et 22.

4) Lorsque l'on met un nombre au carré, que devient son logarithme ?

5) Compléter alors les logarithmes des nombres 9 et 100.

6) Lorsqu'on prend la racine carrée d'un nombre, que devient son logarithme ?

7) Donner alors le logarithme de $\sqrt{5}$.

♦ **LOG.2** Calculer la dérivée des fonctions définies par les expressions suivantes (on précisera le domaine de définition et de dérivabilité pour chacune) :

1) $f(x) = x - \ln(x)$

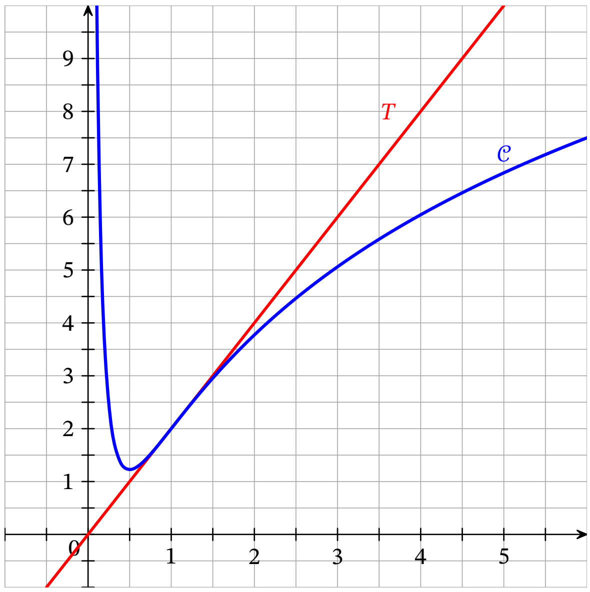
2) $g(x) = 1 + \ln^2(x)$

3) $h(x) = \dfrac{\ln(x)}{1 + \ln^2(x)}$

4) $i(x) = \ln(3x^2)$

5) $j(x) = \ln(x^2 + x)$

♦ **LOG.3** Sur le graphique suivant est tracée la courbe $\mathcal{C}$ d'une fonction f définie sur $]0;6[$ par $f(x) = a\ln(x) + \dfrac{b}{x}$, où a et b sont deux nombres réels.
Est tracée également la tangente T à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1.



Partie A

1) Lire graphiquement le nombre $f(1)$.

2) En déduire la valeur de b.

3) Déterminer graphiquement le nombre $f'(1)$.

4) Montrer que pour tout $x \in]0;6[$, la fonction dérivée f' admet pour expression :

$$f'(x) = \frac{ax - 2}{x^2}.$$

5) En déduire la valeur de a.

Partie B

1) Étudier le signe de $f'(x)$ et en déduire les variations de f sur $]0;6[$.

2) Montrer que le minimum de f sur $]0;6[$ est égal à $4 - 4\ln(2)$.

3) Étudier la convexité de f.

Partie C

1) Montrer que la fonction $F : x \mapsto 4x\ln(x)+2\ln(x)-4x$ est une primitive de f sur $]0;6[$.

2) a) Déterminer la limite de F en 0

b) Montrer que $F(x) = 4x(\ln(x)-1)+2\ln(x)$

c) En déduire la limite de F en $+\infty$.

♦ **LOG.4** Résoudre les équations suivantes :

1) $\ln(x+3) = \ln(2x-4)$

2) $\ln(x^2) = \ln(2x-1)$

3) $2\ln(x+2) = \frac{1}{2}\ln(x^2)$

4) Calculer $\ln(\mathrm{e}^2)$.

5) Si n est un entier, que vaut $\ln(\mathrm{e}^n)$?

6) Résoudre l'équation $\ln(x) = 4$.

7) Résoudre l'équation $\ln(x+1)+\ln(x+2) = 5$.

♦ **LOG.5** On considère que la masse annuelle d'ordure ménagère d'une famille est de 256 Kg en 2015. Grâce à une opération de tri, elle parvient à réduire de 1,7% par an cette masse. On note u_n la masse d'ordure ménagère, en kg, de la famille l'année $2015+n$.

1) Que valent u_0, u_1 et u_2 ?

2) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.

3) Quelle est la nature de la suite (u_n) ?

4) En déduire u_n en fonction de n.

5) À partir de quelle année la famille aura-t-elle moins de 200 kg d'ordures ménagères ?

6) Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

♦ **LOG.6** Résoudre les (in)équations suivantes :

- $\mathrm{e}^{2x} - 5\mathrm{e}^x + 6 = 0$
- $\mathrm{e}^{3x} - 2\mathrm{e}^x = 0$
- $\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^x - 6 > 0$
- $\mathrm{e}^{4x} - 2\mathrm{e}^{2x} - 2 = 0$.

♦ **LOG.7** Calculer les limites suivantes :

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin(\ln x)}{x^2}$
- $\lim\limits_{x\to 0} 2x^2 \ln x$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\mathrm{e}^{4x} - x\mathrm{e}^{3x}\right)$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\dfrac{x^2+2x+7}{x^3+3x+4}\right)$.

♦ **LOG.8** Soit $\alpha > 0$ et $\mathcal{C}_f$, $\mathcal{C}_g$ les représentations graphiques des fonctions f et g définies pour tout $x > 0$ par : $f(x) = \ln x$ et $g(x) = \alpha x^2$.

1) Déterminer la plus grande valeur de α pour laquelle $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ ont au moins un point d'intersection.

2) Pour cette valeur de α, donner le nombre de points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

3) Déterminer leurs coordonnées.

♦ **LOG.9** Montrer que pour tout réel x :

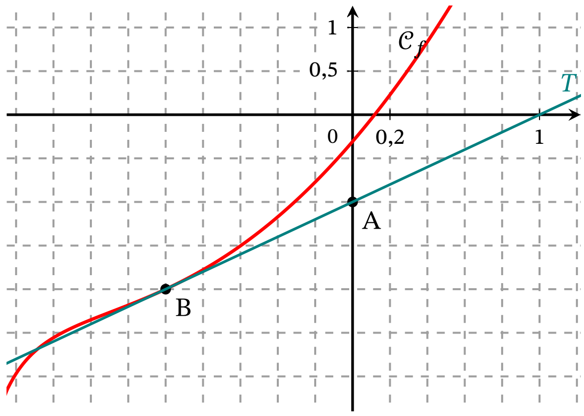
$$\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) = -\ln\left(\sqrt{1+x^2}-x\right).$$

Bacs récents

♦ **LOG.10** (**Métropole Sujet 2 2024**) On considère une fonction f définie et deux fois dérivable sur $]-2\,;\,+\infty[$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan, f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.

On a tracé ci-dessous la courbe $\mathcal{C}_f$ et sa tangente T au point B d'abscisse -1.

On précise que la droite T passe par le point A$(0\,;\,-1)$.



Partie A - Exploitation du graphique

À l'aide du graphique, répondre aux questions ci-dessous.

1) Préciser $f(-1)$ et $f'(-1)$.

2) La fonction f est-elle convexe sur son ensemble de définition ? Justifier.

3) Conjecturer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ et donner une valeur arrondie à 10^{-1} près d'une solution.

Partie B - Étude de la fonction f

On considère que la fonction f est définie sur $]-2\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = x^2+2x-1+\ln(x+2),$$

où ln désigne la fonction logarithme népérien.

1) Déterminer par le calcul la limite de la fonction f en -2. Interpréter graphiquement ce résultat.

On admet que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

2) Montrer que pour tout $x > -2$,

$$f'(x) = \frac{2x^2+6x+5}{x+2}.$$

3) Étudier les variations de la fonction f sur $]-2\,;\,+\infty[$ puis dresser son tableau de variations complet.

4) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]-2\,;\,+\infty[$ et donner une valeur arrondie de α à 10^{-2} près.

5) En déduire le signe de $f(x)$ sur $]-2\,;\,+\infty[$.

6) Montrer que $\mathcal{C}_f$ admet un unique point d'inflexion et déterminer son abscisse.

Partie C - Une distance minimale

Soit g la fonction définie sur $]-2\,;\,+\infty[$ par

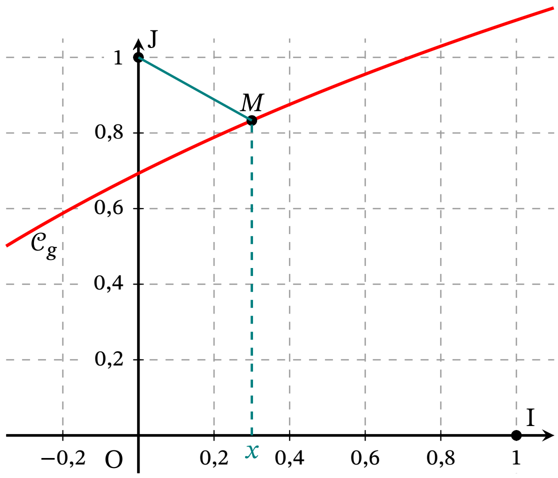
$$g(x) = \ln(x+2).$$

On note $\mathcal{C}_g$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(0\,;\,\mathrm{I}\,,\,\mathrm{J})$, représentée ci-après.

Soit M un point de $\mathcal{C}_g$ d'abscisse x.

Le but de cette partie est de déterminer pour quelle valeur de x la distance JM est minimale.

On considère la fonction h définie sur $]-2\,;\,+\infty[$ par $h(x) = \mathrm{J}M^2$.



1) Justifier que pour tout $x > -2$, on a :

$$h(x) = x^2 + [\ln(x+2) - 1]^2.$$

2) On admet que la fonction h est dérivable sur $]-2\,;\,+\infty[$ et on note h' sa fonction dérivée.
On admet également que pour tout réel $x > -2$,

$$h'(x) = \frac{2f(x)}{x+2}$$

où f est la fonction étudiée en **partie B**.

a) Dresser le tableau de variations de h sur $]-2\,;\,+\infty[$.
Les limites ne sont pas demandées.

b) En déduire que la valeur de x pour laquelle la distance JM est minimale est α où α est le nombre réel défini à la question **4.** de la **partie B**.

3) On notera M_α le point de $\mathcal{C}_g$ d'abscisse α.

a) Montrer que $\ln(\alpha+2) = 1 - 2\alpha - \alpha^2$.

b) En déduire que la tangente à $\mathcal{C}_g$ au point M_α et la droite $(\mathrm{J}M_\alpha)$ sont perpendiculaires.
On pourra utiliser le fait que, dans un repère orthonormé, deux droites sont perpendiculaires lorsque le produit de leurs coefficients directeurs est égal à -1.

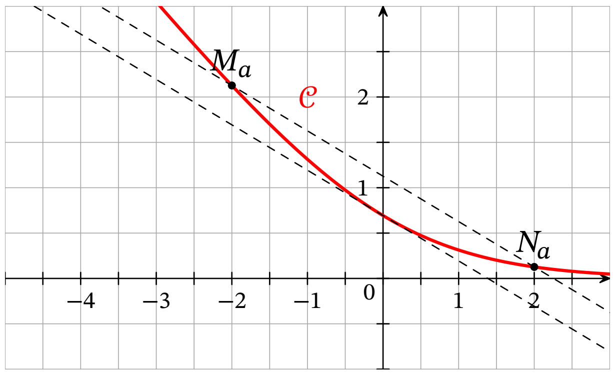
♦ **LOG.11** (**Métropole Sujet 2 2023**) On considère la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par

$$f(x) = \ln\left(1 + \mathrm{e}^{-x}\right),$$

où ln désigne la fonction logarithme népérien.

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$.

La courbe $\mathcal{C}$ est tracée ci-dessous.



1) a) Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.

b) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
Interpréter graphiquement ce résultat.

c) On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbf{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.
Calculer $f'(x)$ puis montrer que, pour tout nombre réel x, $f'(x) = \dfrac{-1}{1+\mathrm{e}^x}$.

d) Dresser le tableau de variations complet de la fonction f sur $\mathbf{R}$.

2) On note T_0 la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ en son point d'abscisse 0.

a) Déterminer une équation de la tangente T_0.

b) Montrer que la fonction f est convexe sur $\mathbf{R}$.

c) En déduire que, pour tout nombre réel x, on a :

$$f(x) \geqslant -\frac{1}{2}x + \ln(2).$$

3) Pour tout nombre réel a différent de 0, on note M_a et N_a les points de la courbe $\mathcal{C}$ d'abscisses respectives $-a$ et a.
On a donc : $M_a(-a\,;\,f(-a))$ et $N_a(a\,;\,f(a))$.

a) Montrer que, pour tout nombre réel x, on a : $f(x) - f(-x) = -x$.

b) En déduire que les droites T_0 et $(M_a N_a)$ sont parallèles.

♦ **LOG.12** (**Polynésie 2023 sujet 1**) Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = -1$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 0{,}9u_n - 0{,}3.$$

1) a) Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$u_n = 2 \times 0{,}9^n - 3.$$

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $-3 < u_n \leqslant -1$.

c) Démontrer que la suite (u_n) est strictement décroissante.

d) Démontrer que la suite (u_n) converge et préciser sa limite.

2) On se propose d'étudier la fonction g définie sur $]-3\,;\,-1]$ par :

$$g(x) = \ln(0{,}5x + 1{,}5) - x.$$

a) Justifier toutes les informations données par le tableau de variations de la fonction g (limites, variations, image de -1)

x	-3		-2		-1
Variations de g	$-\infty$	↗	$g(-2)$	↘	1

b) En déduire que l'équation $g(x) = 0$ a exactement une solution que l'on notera α et dont on donnera un encadrement d'amplitude 10^{-3}.

3) Dans la suite de l'exercice, on considère la suite (v_n) définie pour tout $\in \mathbf{N}$, par :

$$v_n = \ln(0{,}5u_n + 1{,}5).$$

a) En utilisant la formule donnée Ã la question **1. a.**, démontrer que la suite v est arithmétique de raison $\ln(0{,}9)$.

b) Soit n un entier naturel. Démontrer que $u_n = v_n$ si, et seulement si $g(u_n) = 0$.

c) Démontrer qu'il n'existe aucun rang $k \in \mathbf{N}$ pour lequel $u_k = \alpha$.

d) En déduire qu'il n'existe aucun rang $k \in \mathbf{N}$ pour lequel $v_k = u_k$.

♦ **LOG.13** (**Centres étrangers Groupe 1 Sujet 2 2023**) On considère la fonction f définie sur $]-1{,}5\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = \ln(2x + 3) - 1.$$

Le but de cet exercice est d'étudier la convergence de la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 0 \text{ et } u_{n+1} = f(u_n) \text{ pour tout entier naturel } n.$$

Partie A - Étude d'une fonction auxiliaire

On considère la fonction g définie sur $]-1{,}5\,;\,+\infty[$ par $g(x) = f(x) - x$.

1) Déterminer la limite de la fonction g en $-1{,}5$.

On admet que la limite de la fonction g en $+\infty$ est $-\infty$.

2) Étudier les variations de la fonction g sur $]-1{,}5\,;\,+\infty[$.

3) a) Démontrer que, dans l'intervalle $]-0{,}5\,;\,+\infty[$, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α.

b) Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

Partie B - Étude de la suite (u_n)

On admet que la fonction f est strictement croissante sur $]-1{,}5\,;\,+\infty[$.

1) Soit x un nombre réel. Montrer que si $x \in [-1\,;\,\alpha]$ alors $f(x) \in [-1\,;\,\alpha]$.

2) a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$-1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha.$$

b) En déduire que la suite (u_n) converge.

♦ **LOG.14** (**Métropole 2023 Sujet 1**) On considère la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = x^2 - 8\ln(x)$$

où ln désigne la fonction logarithme népérien.

On admet que f est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$, on note f' sa fonction dérivée.

1) Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

2) On admet que, pour tout $x > 0$,

$$f(x) = x^2\left(1 - 8\frac{\ln(x)}{x^2}\right).$$

En déduire la limite : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

3) Montrer que, pour tout réel x de $]0\,;\,+\infty[$,

$$f'(x) = \frac{2\left(x^2 - 4\right)}{x}.$$

4) Étudier les variations de f sur $]0\,;\,+\infty[$ et dresser son tableau de variations complet.

On précisera la valeur exacte du minimum de f sur $]0\,;\,+\infty[$.

5) Démontrer que, sur l'intervalle $]0;\,2]$, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α (on ne cherchera pas à déterminer la valeur de α).

6) On admet que, sur l'intervalle $[2\ ;\ +\infty[$, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique β (on ne cherchera pas Ã déterminer la valeur de β).
En déduire le signe de f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

7) Pour tout nombre réel k, on considère la fonction g_k définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$g_k(x) = x^2 - 8\ln(x) + k.$$

En s'aidant du tableau de variations de f, déterminer la plus petite valeur de k pour laquelle la fonction g_k est positive sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

Autres

♦ **LOG.15** Démontrer que pour tout $x \in]0;+\infty[$:

$$x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x.$$

Partie A

1) En déduire la limite $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

2) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$.

Partie B

Soit (u_n) la suite définie par :

$$u_n = \left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\ldots\left(1+\frac{n}{n^2}\right).$$

On pose $v_n = \ln u_n$.

1) Démontrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$:

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

2) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$:

$$\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{(n+1)(2n+1)}{12n^3} \leqslant v_n \leqslant \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

3) En déduire la limite de (v_n) puis de (u_n).

♦ **LOG.16** Déterminer toutes les fonctions définies et dérivables sur $]0;+\infty[$ telles que :

$$\forall a,b \in \mathbf{R},\quad f(ab) = f(a) + f(b).$$

♦ **LOG.17** Étudier la fonction définie sur $\mathbf{R}_+^*$ par :

$$f(x) = \frac{(\ln x)^2}{x}.$$

♦ **LOG.18** (ch, sh **et réciproques**) On définit ch et sh (cosinus et sinus hyperboliques) sur $\mathbf{R}$ par :

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \text{ et } \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

1) Étudier des deux fonctions.

2) Montrer que pour tout $x \in [1;+\infty[$:

$$\operatorname{ch}\left(\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\right) = x.$$

On pose pour tout $x \in]1;+\infty[$,
$\operatorname{argch} x = \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$.

3) Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}$:

$$\operatorname{sh}\left(\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right) = x.$$

On pose pour tout $x \in \mathbf{R}$,
$\operatorname{argsh} x = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$.

4) En déduire les expressions dérivées de argch et argsh.

♦ **LOG.19** (**Antilles Guyane 2017**) Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel strictement positif. Le but de l'exercice est d'étudier l'équation

$$(E_n): \quad \frac{\ln(x)}{x} = \frac{1}{n}$$

ayant pour inconnue le nombre réel strictement positif x.

Partie A

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x}.$$

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

On a donné en ANNEXE, qui n'est pas à rendre, la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f dans un repère orthogonal.

1) Étudier les variations de la fonction f.

2) Déterminer son maximum.

Partie B

1) Montrer que, pour $n \geqslant 3$, l'équation $f(x) = \dfrac{1}{n}$ possède une unique solution sur $[1\ ;\ e]$ notée α_n.

2) D'après ce qui précède, pour tout entier $n \geqslant 3$, le nombre réel α_n est solution de l'équation (E_n).

- **a)** Sur le graphique sont tracées les droites D_3, D_4 et D_5 d'équations respectives $y = \dfrac{1}{3}$, $y = \dfrac{1}{4}$, $y = \dfrac{1}{5}$.
Conjecturer le sens de variation de la suite (α_n).
- **b)** Comparer, pour tout entier $n \geqslant 3$, $f(\alpha_n)$ et $f(\alpha_{n+1})$.
Déterminer le sens de variation de la suite (α_n).
- **c)** En déduire que la suite (α_n) converge.
Il n'est pas demandé de calculer sa limite.

3) On admet que, pour tout entier $n \geqslant 3$, l'équation (E_n) possède une autre solution β_n telle que

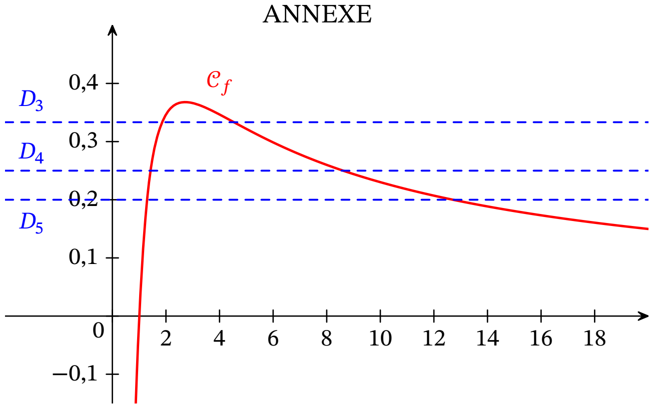
$$1 \leqslant \alpha_n \leqslant \mathrm{e} \leqslant \beta_n.$$

a) On admet que la suite (β_n) est croissante.
Établir que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3,

$$\beta_n \geqslant n\frac{\beta_3}{3}.$$

b) En déduire la limite de la suite (β_n).

ANNEXE



♦ **LOG.20** On définit la fonction f par : $\forall x \in \mathbf{R}$,

$$f(x) = \ln(\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x + 1).$$

1) Justifier que f est bien définie, continue et dérivable sur $\mathbf{R}$.

2) Étudier les variations de f.

3) Préciser les asymptotes éventuelles de f et la position de la courbe par rapport à celles-ci.

4) Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}$:

$$f''(x) = -\frac{\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x + 1)^2}\left(\mathrm{e}^{2x} - 4\mathrm{e}^x + 1\right).$$

5) Montrer que la courbe admet deux points d'inflexion d'abscisses opposées.

♦ **LOG.21** (**Ulm BL 2012**) Soit a un réel strictement supérieur à 1. On définit la suite (u_n) par récurrence de la façon suivante : $u_1 = 1$ et pour tout $n \geq 2, u_{n+1} = a^{u_n}$.

1) Faire l'étude sur $\mathbf{R}^+$ de la fonction

$$f : x \mapsto a^x - x,$$

et tracer grossièrement son graphe.

☞ **Indications exercice 21 :** Pour tout réel $a > 0$ et tout réel x, $a^x = \mathrm{e}^{x \ln a}$.

2) Dans cette question seulement, on prend $a = \sqrt{2}$. Étudier la convergence de la suite (u_n).

3) Déterminer l'ensemble des valeurs de $a > 1$ pour lesquelles la suite (u_n) converge.

♦ **LOG.22** On considère la fonction f définie sur $]0{,}1[$ par $f(x) = -x\ln x - (1-x)\ln(1-x)$.

1) Soit g la fonction définie sur $]0{,}1[$ par $g(x) = \ln(1-x) - \ln x$.

a) Résoudre, dans $]0{,}1[$, l'équation $g(x) = 0$.

b) Étudier, pour tout $x \in]0{,}1[$, le signe de $g(x)$ en fonction de x.

2) a) Justifier que f est dérivable sur $]0{,}1[$ et déterminer sa dérivée.

b) En déduire les variations de f sur $]0{,}1[$.

c) Étudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

d) Dresser le tableau de variations complet de f sur $]0{,}1[$.

3) On considère deux réels a et b strictement positifs tels que $a + b = 1$.

a) Utiliser les résultats de la question 2. pour démontrer que

$$a\ln\left(\frac{1}{a}\right) + b\ln\left(\frac{1}{b}\right) \leqslant \ln 2.$$

b) Démontrer que l'inégalité précédente est une égalité si et seulement si $a = b = \dfrac{1}{2}$.

♦ **LOG.23** Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par

$$f(x) = x - \ln\left(1 + x^2\right).$$

1) a) Résoudre dans $\mathbf{R}$ l'équation $f(x) = x$.

b) Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0{,}1]$. En déduire que si $x \in [0{,}1]$, alors $f(x) \in [0{,}1]$.

2) Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \in [0{,}1]$.

b) Étudier le sens de variation de la suite (u_n).

c) Démontrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

♦ **LOG.24** On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{2k+2}\right) \quad \text{et} \quad v_n = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}.$$

1) Montrer que (u_n) diverge vers $-\infty$.

2) En déduire le comportement asymptotique de (v_n).