La calculatrice est interdite, les numéros d'exercices et de questions doivent être soulignés, les résultats encadrés.
Soyez clairs et précis dans votre rédaction et dans la présentation de vos calculs.

♦ **INT 3.1** On considère la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = 3x + 1 - 2x\ln(x).$$

On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$.
On note f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.
On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

1) Déterminer la limite de la fonction f en 0 et en $+\infty$.

2) a) Démontrer que pour tout réel x strictement positif : $f'(x) = 1 - 2\ln(x)$.

b) Étudier le signe de f' et dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
On fera figurer dans ce tableau les limites ainsi que la valeur exacte de l'extremum.

3) a) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $]0\,;\,+\infty[$. On notera α cette solution.

b) En déduire le signe de la fonction f sur $]0\,;\,+\infty[$.

4) a) Étudier la convexité de la fonction f sur $]0\,;\,+\infty[$.
Quelle est la position de la courbe $\mathcal{C}_f$ par rapport à ses tangentes ?

b) Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1.

c) Déduire des questions 5.a et 5.b que pour tout réel x strictement positif :

$$\ln(x) \geqslant 1 - \frac{1}{x}.$$

♦ **INT 3.2** Cet exercice a deux types de questions.

- Les questions à choix multiple numérotées M1 ; M2 etc... avec □. Vous y répondrez en noircissant la case correspondant à sa réponse. Pour chacune de ces questions, il y a une et une seule bonne réponse. Toute réponse fausse retire des points ! Noircir plusieurs réponses à une même question a un effet de neutralisation (vous récolterez 0 point).
- La question à réponse brute est numérotée L1 avec Δ. Elle ne demande aucune justification : vous écrirez simplement la réponse sous la question.

□ M1 La quantité $\ln(16)$ est aussi égale à :

A $4\ln(2)$

B $2\ln(8)$

C $(\ln(4))^2$

D $(\ln(2))^4$

E $3\ln(2)$

□ M2 La quantité $\ln(\sqrt{\mathrm{e}}) + \ln\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$ est aussi égale à :

A -1

B 0

C $\frac{1}{2}$

D $\sqrt{\ln(\mathrm{e})} + \frac{1}{\ln(\mathrm{e})}$

E $-\frac{1}{2}$

□ M3 La quantité $\ln\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right) + \ln\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$ est aussi égale à :

A 5

B aucune des autres réponses proposées

C 0

D 1

E $\frac{5}{2}$

Dans les questions suivantes, on cherche uniquement les solutions réelles.

□ M4 L'équation $x^2 + 4x + 3 = x + 7$ possède :

A au moins trois solutions

B deux solutions

C une seule solution

D zéro solution

□ M5 L'équation $\ln(x^2 + 4x + 3) = \ln(x + 7)$ possède :

A plus de deux solutions

B 0 solution

C une seule solution

D deux solutions

□ M6 L'équation $\ln(x+1) + \ln(x+3) = \ln(x+7)$ possède :

A zéro solution

B deux solutions

C une seule solution

D plus de deux solutions

□ M7 L'équation $\mathrm{e}^{x^2} = \frac{1}{9}$ possède :

A deux solutions

B une solution

C zéro solution

D plus de deux solutions

□ M8 L'équation $3\mathrm{e}^{x} - 7\mathrm{e}^{-x} - 20 = 0$ possède :

A plus de deux solutions

B zéro solution

C une seule solution

D deux solutions

□ M9 L'inéquation $x\ln(\sqrt{x}) > \sqrt{x}\,\ln(x)$ a pour ensemble de solutions :

A $]0;1[\cup\left]\frac{9}{2};+\infty\right[$

B $]0;1[\cup]4;+\infty[$

C $]1;2[\cup]4;+\infty[$

D $\left]0;\frac{1}{2}\right[\cup]4;+\infty[$

E $]4;+\infty[$

△ **L1.** Donner les solutions de l'équation

$$\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{1-x} - \mathrm{e} - 1 = 0.$$

☞ **Correction exercice 2 :** Réponses :

□ M1 : A	□ M3 : C	□ M5 : D	□ M7 : C	□ M9 : B
□ M2 : E	□ M4 : B	□ M6 : C	□ M8 : C	△ **L1.** : $x = 1$ et $x = 0$.

☞ **Correction exercice 1 :** On considère la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = 3x + 1 - 2x\ln(x)$.

On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$. On note f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

1) On cherche les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.

- On sait que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\ln(x) = 0$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (3x + 1 - 2x\ln(x)) = 1$ et donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = 1$.
- $f(x) = x\,(3 - 2\ln(x)) + 1$.
  $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} (3 - 2\ln(x)) = -\infty$.
  On en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} x\,(3 - 2\ln(x)) = -\infty$ et donc que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

2) a) Sur $]0\,;\,+\infty[$, $f'(x) = 3 + 0 - 2\times\ln(x) - 2x\times\dfrac{1}{x} = 3 - 2\ln(x) - 2 = 1 - 2\ln(x)$.

b) On étudier le signe de f' sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

$f'(x) > 0 \iff 1 - 2\ln(x) > 0 \iff \dfrac{1}{2} > \ln(x) \iff x < \mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$

$f\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right) = 3\mathrm{e}^{\frac{1}{2}} + 1 - 2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\times\ln\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right) = 3\mathrm{e}^{\frac{1}{2}} + 1 - 2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\times\dfrac{1}{2} = 3\mathrm{e}^{\frac{1}{2}} + 1 - \mathrm{e}^{\frac{1}{2}} = 2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}} + 1 \approx 4{,}3$.

On en déduit le tableau des variations de f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

x	0		$\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$		$+\infty$
Signe de f'	‖	$+$	0	$-$	
Variations de f	‖ 1	↗	$2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}} + 1$	↘	$-\infty$

3) a) Le maximum de la fonction f vaut $2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}} + 1 > 0$; on complète le tableau des variations de f.

x	0		$\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$		α		$+\infty$
Variations de f	‖ 1	↗	$2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}} + 1$	↘	0	↘	$-\infty$

La fonction f est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ donc continue sur cet intervalle.

- Sur l'intervalle $\left]-\infty\,,\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right[$, la fonction f est strictement positive donc l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution.
- Sur l'intervalle $\left]\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\,;\,+\infty\right[$, la fonction f est continue et strictement décroissante ; elle passe d'une valeur positive à une valeur négative donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique sur cet intervalle. On l'appelle α.

On en déduit que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α sur $]0\,;\,+\infty[$, et que cette solution appartient à l'intervalle $\left]\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\,;\,+\infty\right[$.

b) Le signe de la fonction f sur $]0\,;\,+\infty[$ est donné par le tableau :

x	0		$\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$		α		$+\infty$
Variations de f	‖ 1	↗	$2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}} + 1$	↘	0	↘	$-\infty$
Signe de f	‖		$+$		0	$-$	

f étant strictement décroissante sur $]\mathrm{e}^{1/2};+\infty[$, on a $x < \alpha$ implique $f(x) > f(\alpha) = 0$; de même $x > \alpha$ implique $f(x) < f(\alpha) = 0$.

Donc $f(x) > 0$ sur $]0\,;\,\alpha[$, $f(\alpha) = 0$ et $f(x) < 0$ sur $]\alpha\,;\,+\infty[$.

4) a) Pour étudier la convexité de la fonction f sur $]0\,;\,+\infty[$, on calcule la dérivée seconde f'' :

$f''(x) = 0 - 2\times\dfrac{1}{x} = -\dfrac{2}{x} < 0$ sur $]0\,;\,+\infty[$; on en déduit que la fonction f est concave sur $]0\,;\,+\infty[$ et que sur cet intervalle, la courbe $\mathcal{C}_f$ est située au dessous des ses tangentes.

b) Soit T la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1.

T a pour équation $y = f'(1)\,(x-1) + f(1)$.

- $f(x) = 3x + 1 - 2x\ln(x)$ donc $f(1) = 3 \times 1 + 1 - 2 \times 1 \times \ln(1) = 4$
- $f'(x) = 1 - 2\ln(x)$ donc $f'(1) = 1 - 2 \times \ln(1) = 1$

Donc T a pour équation $y = 1\,(x-1) + 4$ soit $y = x + 3$.

c) La courbe $\mathcal{C}$ est en dessous de ses tangentes donc de la tangente T et donc, pour tout x de $]0\,;\,+\infty[$, on a $f(x) \leqslant x + 3$.

$$f(x) \leqslant x+3 \iff 3x+1-2x\ln(x) \leqslant x+3 \iff 2x-2 \leqslant 2x\ln(x) \iff \frac{2x}{2x} - \frac{2}{2x} \leqslant \ln(x)$$
$$\iff 1 - \frac{1}{x} \leqslant \ln(x)$$

Donc, pour tout x de $]0\,;\,+\infty[$, on a : $\ln(x) \geqslant 1 - \dfrac{1}{x}$.