Interrogation 3

La calculatrice est interdite, les numéros d'exercices et de questions doivent être soulignés, les résultats encadrés.
Soyez clairs et précis dans votre rédaction et dans la présentation de vos calculs.

♦ **INT 3.1** On considère la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = 3x + 1 - 2x\ln(x).$$

On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$.
On note f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.
On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

1) Déterminer la limite de la fonction f en 0 et en $+\infty$.

2) a) Démontrer que pour tout réel x strictement positif : $f'(x) = 1 - 2\ln(x)$.

b) Étudier le signe de f' et dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
On fera figurer dans ce tableau les limites ainsi que la valeur exacte de l'extremum.

3) a) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $]0\,;\,+\infty[$. On notera α cette solution.

b) En déduire le signe de la fonction f sur $]0\,;\,+\infty[$.

4) a) Étudier la convexité de la fonction f sur $]0\,;\,+\infty[$.
Quelle est la position de la courbe $\mathcal{C}_f$ par rapport à ses tangentes ?

b) Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1.

c) Déduire des questions 4.a et 4.b que pour tout réel x strictement positif :

$$\ln(x) \geqslant 1 - \frac{1}{x}.$$

♦ **INT 3.2** Cet exercice a deux types de questions.

- Les questions à choix multiple numérotées M1 ; M2 etc... avec □. Vous y répondrez en noircissant la case correspondant à sa réponse. Pour chacune de ces questions, il y a une et une seule bonne réponse. Toute réponse fausse retire des points ! Noircir plusieurs réponses à une même question a un effet de neutralisation (vous récolterez 0 point).
- La question à réponse brute est numérotée L1 avec Δ. Elle ne demande aucune justification : vous écrirez simplement la réponse sous la question.

□ M1 La quantité $\ln(16)$ est aussi égale à :

A $4\ln(2)$
B $2\ln(8)$
C $(\ln(4))^2$
D $(\ln(2))^4$
E $3\ln(2)$

□ M2 La quantité $\ln(\sqrt{e}) + \ln\left(\frac{1}{e}\right)$ est aussi égale à :

A -1
B 0
C $\frac{1}{2}$
D $\sqrt{\ln(e)} + \frac{1}{\ln(e)}$
E $-\frac{1}{2}$

□ M3 La quantité $\ln\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right) + \ln\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$ est aussi égale à :

A 5
B aucune des autres réponses proposées
C 0
D 1
E $\frac{5}{2}$

Dans les questions suivantes, on cherche uniquement les solutions réelles.

□ M4 L'équation $x^2 + 4x + 3 = x + 7$ possède :

A au moins trois solutions
B deux solutions
C une seule solution
D zéro solution

□ M5 L'équation $\ln(x^2 + 4x + 3) = \ln(x + 7)$ possède :

A plus de deux solutions
B 0 solution
C une seule solution
D deux solutions

□ M6 L'équation $\ln(x+1) + \ln(x+3) = \ln(x+7)$ possède :

A zéro solution
B deux solutions
C une seule solution
D plus de deux solutions

□ M7 L'équation $e^{x^2} = \frac{1}{9}$ possède :

A deux solutions
B une solution
C zéro solution
D plus de deux solutions

□ M8 L'équation $3e^x - 7e^{-x} - 20 = 0$ possède :

A plus de deux solutions
B zéro solution
C une seule solution
D deux solutions

□ M9 L'inéquation $x\ln(\sqrt{x}) > \sqrt{x}\,\ln(x)$ a pour ensemble de solutions :

A $]0;1[\cup\left]\frac{9}{2};+\infty\right[$
B $]0;1[\cup]4;+\infty[$
C $]1;2[\cup]4;+\infty[$
D $\left]0;\frac{1}{2}\right[\cup]4;+\infty[$
E $]4;+\infty[$

△ **L1.** Donner les solutions de l'équation

$$e^x + e^{1-x} - e - 1 = 0.$$