

La totalité est plus que la somme des parties.

Aristote (384 av JC - 322 av JC).

"What's one and one and one and one and one and one and one and one and one and one?"

"I don't know," said Alice. "I lost count."

"She can't do Addition."

Lewis Carroll.

I Des ensembles

9.1.1 Notions ensemblistes

On se contentera cette année d'une vision intuitive de ce qu'est un ensemble, c'est-à-dire :

Définition 1 (Non rigoureuse) — On appelle ensemble E une collection d'objets. Ces objets sont appelés les éléments de E . Si x est un élément de E , on dit que x **appartient** à E et on note $x \in E$.

Définition 2 (Inclusion) — On dit qu'un ensemble F est **inclus** dans un ensemble E si tout élément x appartenant à F appartient aussi à E . On note $F \subset E$.

Proposition 9.1 (CNS d'égalité) — Deux ensembles E et F sont égaux si et seulement si on a les deux inclusions suivantes :

- $F \subset E$;
- $E \subset F$.

9.1.2 Opérations ensemblistes

Définition 3 (Opérations ensemblistes) — Soient A et B deux ensembles. On peut définir les ensembles suivants :

- leur **union** $A \cup B$: les éléments qui appartiennent à A ou à B ;
- leur **intersection** $A \cap B$: les éléments qui appartiennent à A et à B ;
- leur **produit cartésien** $A \times B : A \times B = \{(x, y), x \in A, y \in B\}$.
 (x, y) est appelé un **couple** d'éléments.

☞ Exemple 1

- Si $A = \{1; 2; 4\}$ et $B = \{2; 5; 6\}$, donner $A \cup B$, $A \cap B$ et $A \times B$.
- Même question si $A =]0; +\infty[$ et $B = [-1; 1]$.

Définition 4 (Disjonctions) — Deux ensembles A et B sont dits **disjoints** lorsque leur intersection est vide, c'est-à-dire $A \cap B = \emptyset$.

Proposition 9.2 (commutativité, associativité) — Si A , B et C sont des ensembles :

- $A \cap B = B \cap A$ et $A \cup B = B \cup A$ (commutativité);
- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ et $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (associativité).

Proposition 9.3 (Distributivité) — Si A , B et C sont des ensembles :

- $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ (distributivité de \cap sur \cup);
- $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ (distributivité de \cup sur \cap).

9.1.3 Parties d'un ensemble fini

Définition 5 (Partie d'un ensemble) — Soit E un ensemble. Une **partie** de E est un sous-ensemble de E , c'est-à-dire un ensemble B tel que $B \subset E$.

Exemple 2 Si $E = \{0; 4; 6\}$, donner toutes les parties de E .

Définition 6 (complémentaire d'une partie) — Si E est un ensemble et A une partie de E , alors \bar{A} est le complémentaire de A dans E : l'ensemble des éléments qui appartiennent à E mais pas à A .

Proposition 9.4 (Loi de de Morgan) — Si A et B sont deux parties d'un ensemble E :

- $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$;
- $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

9.1.4 p -uplets

Définition 7 (p -uplets) — Si A est un ensemble et p est un entier supérieur à 2, on définit :

$$A^p = \{(x_1, \dots, x_p), \quad \forall 1 \leq i \leq p, \quad x_i \in A\}.$$

Les p -listes (x_1, \dots, x_p) sont appelés des p -uplets.

Définition 8 (Produit cartésien de p ensembles) — Soit p un entier supérieur à 2. Si A_1, A_2, \dots, A_p sont des ensembles, on définit :

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_p = \{(x_1, \dots, x_p), \quad \forall 1 \leq i \leq p, \quad x_i \in A_i\}.$$

9.1.5 Applications injectives, surjectives, bijectives

Définition 9 (Application) — Soient E et F deux ensembles. On dit que $f : E \rightarrow F$ est une **application** de E dans F si, à tout élément x de E , f associe un unique élément y de F . On note $y = f(x)$.

Définition 10 (Injection) — On dit qu'une application $f : E \rightarrow F$ est **injective** si et seulement si :

$$\forall (x_1, x_2) \in E^2, \quad f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2.$$

Cela revient à dire que « f ne prend pas deux fois la même valeur ».

Définition 11 (Surjection) — On dit qu'une application $f : E \rightarrow F$ est **surjective** si et seulement si :

$$\forall y \in F, \quad \exists x \in E, \quad f(x) = y.$$

Cela revient à dire que « f prend toutes les valeurs de F au moins une fois ».

Définition 12 (Bijection) — On dit qu'une application $f : E \rightarrow F$ est **bijjective** si et seulement si :

$$\forall y \in F, \quad \exists! x \in E, \quad f(x) = y.$$

Cela revient à dire que « f prend toutes les valeurs de F une et une seule fois ».

9.1.6 Cardinaux d'ensembles

Tous les ensembles considérés dans le chapitre sont finis.

Définition 13 (Cardinal d'un ensemble fini) — On dit qu'un ensemble A est **fini** s'il existe une bijection $f : A \mapsto \llbracket 1; n \rrbracket$.

Si A est un ensemble fini, son cardinal est le **nombre d'éléments** de A .

On note ce nombre $\text{Card}(A)$, ou $|A|$, ou encore $\#A$.

Exemple 3

- Si $A = \{1; 2; 7\}$ et $B = \{-5; -4; \dots; 5\}$, donner le cardinal de A , puis le cardinal de B .
- Donner le cardinal de $A \cup B$, puis le cardinal de $A \cap B$.

Proposition 9.5 (Cardinal d'une union) — Si A et B sont deux ensembles, alors :

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B).$$

Si A et B sont **disjoints**, alors $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B)$.

Proposition 9.6 (Principe additif) — Soit p un entier naturel non nul.

Si A_1, A_2, \dots, A_p sont des ensembles deux à deux disjoints, alors :

$$\text{Card}(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_p) = \text{Card}(A_1) + \dots + \text{Card}(A_p).$$

Proposition 9.7 (Principe multiplicatif) — Si A et B sont deux ensembles, alors :

$$\text{Card}(A \times B) = \text{Card}(A) \times \text{Card}(B).$$

De même, si p est un entier naturel non nul :

$$\text{Card}(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_p) = \text{Card}(A_1) \times \text{Card}(A_2) \times \dots \times \text{Card}(A_p).$$

Proposition 9.8 (Corollaire) — Soit E un ensemble fini de cardinal n . Alors le nombre de p -uplets d'éléments de E est n^p .

II Arrangements et permutations

9.2.1 Arrangements

Définition 14 (Arrangement) — Soit n un entier naturel non nul, A un ensemble fini à n éléments et p un entier naturel inférieur à n .

Un **arrangement** de p éléments de A est un p -uplet **d'éléments distincts** de A .

Exemple 4 Si $A = \{-5; -4; \dots; 5\}$, donner trois 4-arrangements distincts de A .

Proposition 9.9 — Soit A un ensemble fini à n éléments et p un entier naturel inférieur à n .

Le nombre de p -arrangements de A est égal à :

$$\mathcal{A}_n^p = n \times (n-1) \times \dots \times (n-(p-1)) = n \times (n-1) \times \dots \times (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}.$$

Par convention, $n! = 1 \times 2 \times \dots \times n$ et $0! = 1$.

9.2.2 Permutation

Définition 15 (Permutation) — Soit A un ensemble fini à n éléments. Une permutation de A est une bijection de A dans A , mais cette année, on se contentera de le voir comme la donnée d'un n -arrangement de A .

Exemple 5 Si $A = \{0; 4; 6\}$, donner toutes les permutations de A .

Proposition 9.10 (Nombre de permutations de A) — Soit A un ensemble fini à n éléments. Le nombre de permutations de A est égal à $n!$.

9.2.3 Calcul du nombre de parties d'un ensemble

Proposition 9.11 (Nombre de parties de A) — Soit A un ensemble fini à n éléments.
 Il y a autant de parties de A que de n -uplets de $\{0; 1\}$, soit 2^n .
 2^n est aussi le nombre de mots de longueur n sur un alphabet à deux éléments.

III Combinaisons

Définition 16 (Combinaison d'un ensemble) — Soit A un ensemble fini à n éléments, k un entier naturel inférieur à n .

Une combinaison de k éléments de A est une partie de A de cardinal k .

Le nombre de combinaisons de k éléments parmi n est noté $\binom{n}{k}$. C'est le nombre de façons de choisir k éléments parmi n , indépendamment de l'ordre.

Proposition 9.12 (Combinaisons de A) — Soit A un ensemble fini à $n > 0$ éléments, k un entier naturel inférieur à n .

- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ (symétrie);
- si $n \geq 1 : \binom{n}{1} = n;$
- $\binom{n}{0} = 1;$
- si $n \geq 2, \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$

Théorème 9.13 (Nombre de combinaisons) — Pour tout $(k, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ tel que $k \leq n$:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Théorème 9.14 (Relation de Pascal) — Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $1 \leq k \leq n-1$:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

On verra deux démonstrations pour la relation de Pascal : par le calcul et par dénombrement.

Application de la relation de Pascal : triangle de Pascal pour le calcul des $\binom{n}{k}$:

	k						
	0	1	2	3	4	5	6
n = 0	1						
n = 1	1	1					
n = 2	1	2	1				
n = 3	1	3	3	1			
n = 4	1	4	6	4	1		
n = 5	1	5	10	10	5	1	
n = 6	1	6	15	20	15	6	1

Proposition 9.15 (Nombre de parties) — On a :

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n.$$

IV Exercices

Applications

- ◆ **CD.1** Soient $E = \{x, y, z, t\}$ et $F = \{a, e, i, o, u\}$.
- 1) Donner un exemple d'application de E dans F .
 - 2) Donner le nombre d'applications de E dans F .
 - 3) Peut-on définir une surjection de E dans F ? De F dans E ?
 - 4) Mêmes questions avec une injection.
 - 5) Donner le nombre d'injections de E dans F .
 - 6) Mêmes question avec une bijection.
- ◆ **CD.2 (Une propriété du cours)** Soient E et F deux ensembles finis non vides disjoints. On pose $n = \text{Card}(E)$ et $p = \text{Card}(F)$.
- 1) Montrer qu'il existe une bijection de $E \cup F$ sur $\llbracket 1; n + p \rrbracket$.
 - 2) En déduire le cardinal de $E \cup F$.
- ◆ **CD.3** Soit E un ensemble à 6 éléments. Combien y a-t-il de permutations de E ?

Cardinaux

- ◆ **CD.4** Soient A et B deux ensembles. On nomme différence symétrique de A et B l'ensemble noté $A \Delta B$ tel que :
- $$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$
- 1) Si $A = \{a; b; c; d\}$ et $B = \{b; d; e; f\}$, quel est l'ensemble $A \Delta B$?
 - 2) On repasse au cas général où A et B sont seulement des ensembles finis. Montrer que :
- $$\text{Card}(A \Delta B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - 2\text{Card}(A \cap B).$$
- ◆ **CD.5** Soient A et B deux ensembles finis et disjoints. On sait que $\text{Card}(A \cup B) = 23$ et $\text{Card}(A \times B) = 132$. Déterminer $\text{Card}(A)$ et $\text{Card}(B)$ si $\text{Card}(A) \leq \text{Card}(B)$.

k -uplets

- ◆ **CD.6** Le code PIN d'un smartphone est composé de 4 chiffres.
- 1) Combien y a-t-il de codes PIN distincts?
 - 2) Combien y a-t-il de codes PIN ne contenant pas le chiffre 3?
 - 3) Combien y a-t-il de codes PIN commençant par le chiffre 4?

k -uplets d'éléments distincts

- ◆ **CD.7** Lors d'un tournoi de danse opposant 10 couples, 5 prix sont distribués aux 5 premiers du classement.
- 1) Déterminer le nombre de façons d'attribuer les 5 prix différents.
 - 2) On sait que Fauve et Maxime ont terminé premier. En déduire le nombre de façons d'attribuer les prix dans ce cas.

- ◆ **CD.8** Combien d'anagrammes peut-on créer avec le mot « MATHS »?

Dénombrements

- ◆ **CD.9** Quatre filles et trois garçons veulent s'asseoir sur un banc. Déterminer le nombre de dispositions possibles :
- Si les garçons sont les uns à côté des autres ainsi que les filles;
 - dans le cas contraire.
- ◆ **CD.10** Dix coureurs courent pour trois médailles (or, argent, bronze). De combien de façons peut-on attribuer ces médailles?
- ◆ **CD.11** Quel est le nombre de poignées de mains échangées lorsque dix personnes se rencontrent et se saluent?
- ◆ **CD.12** De combien de manières peut-on constituer un comité comprenant 2 femmes et 3 hommes dans une société contenant 15 femmes et 20 hommes?
- ◆ **CD.13**
- 1) Combien existe-t-il de nombres entiers naturels de quatre chiffres pris parmi 1, 2, 3, 4?
 - 2) Quelle est leur somme?
 - 3) Mêmes questions pour les nombres entiers formés de quatre chiffres distincts pris parmi 1, 2, 3, 4.

- ◆ **CD.14** Trois personnes veulent manger chacune un gâteau. Il y a 5 gâteaux, combien t a-t-il de choix possibles?

- ◆ **CD.15** Soit E un ensemble de cardinal n ($n > 1$), et a et b deux éléments de E . Soit p un entier naturel tel que $2 \leq p \leq n$. On classe les parties de E à p éléments de la façon suivante : celles qui ne contiennent ni a ni b ; celles contenant un et un seul des éléments a et b ; celles contenant a et b . En déduire la relation :

$$\binom{n}{p} = \binom{n-2}{p} + 2\binom{n-2}{p-1} + \binom{n-2}{p-2}$$

Autres

◆ **CD.16** Soit k un entier naturel non nul. On effectue k tirage successifs d'une boule avec remise parmi un sac contenant 6 boules numérotées de 1 à 6.

- 1) Déterminer la probabilité p_k de tirer au moins une fois la boule qui porte le numéro 6.
- 2) Compléter le script Python ci-dessous qui détermine le premier entier k tel que $p_k > 0,9$.

```
def nbre_tirages():
    k=1
    p=...
    while ... :
        k=...
        p=...
    return(k)
```

◆ **CD.17 (Vandermonde)** Soit n et m deux entiers naturels non nuls. Démontrer que pour tout entier r tel que $0 \leq r \leq n + m$:

$$\binom{n+m}{r} = \sum_{k=0}^r \binom{n}{k} \binom{m}{r-k}.$$

☞ **Indications exercice 17** : On pourra considérer un ensemble à $n+m$ éléments (constitué d'un ensemble à n éléments et d'un ensemble à m éléments) et se demander comment choisir r éléments en étudiant les différents cas (choix d'un certain nombre dans la partie à n éléments).

◆ **CD.18** Soit n un entier naturel non nul et soit E un ensemble à n éléments. Soit p un entier naturel tel que $1 \leq p \leq n$ et soit A une partie de E à p éléments. Quel est le nombre de parties de E qui contiennent exactement un et un seul élément de A ?

◆ **CD.19 (Anniversaires)** On considère qu'il y a 365 jours dans une année.

- 1) Déterminer la probabilité qu'il y ait au moins deux personnes dans un groupe de 23 personnes qui aient la même date d'anniversaire. On arrondira le résultat à 10^{-2} près.
- 2) Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 2. Soit p_k la probabilité que dans un groupe de k personnes, au moins 2 personnes aient la même date d'anniversaire. Justifier que :

$$p_k = 1 - \frac{365 \times 364 \times \dots \times (366 - k)}{365^k}.$$

- 3) Recopier et compléter la fonction pk dont on donne le script ci-dessous afin qu'il retourne la probabilité p_k recherchée :

```
from math import *
def pk(k):
    N=1
    for i in range(...):
        N=...
    return(1-N/365**k)
```

- 4) On donne le script de la fonction anniversaire, qui fait appel à la fonction pk .

```
def anniversaire(p):
    k=2
    while pk(k) < p:
        k=k+1
    return(k)
```

- a) Que retourne l'appel anniversaire(0.005) ?
- b) Quel est le rôle de cette fonction ?

◆ **CD.20 (Dérangements)** Soit n un entier naturel non nul. Soit $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ un ensemble à n éléments. On appelle *élément invariant* (ou *point fixe*) d'une permutation un élément de E qui est envoyé sur lui-même par la permutation.

On appelle *dérangement* de E toute permutation de E qui n'a aucun point fixe, et on note D_n le nombre de dérangements de E (par convention $D_0 = 1$).

- 1) Justifier que $D_1 = 0$.
- 2) Pour $n = 2$, lister les dérangements de E . En déduire D_2 .
- 3) Soit k un entier naturel tel que $0 \leq k \leq n$.
 - a) Justifier qu'il y a $\binom{n}{k} D_{n-k}$ permutations laissant k éléments invariants.
 - b) En déduire la formule : $n! = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D_{n-k}$.

- 4) Cinq couples de danseurs se rendent à un bal masqué. On sépare les hommes et les femmes, et on change leur tenue pour qu'ils soient indiscernables. Chaque femme choisit alors aléatoirement un homme pour danser. Si elle choisit l'homme avec lequel elle est venue au bal, on parle de couple légitime. Quelle est la probabilité qu'aucun couple ne soit légitime ? Et qu'un seul couple légitime se forme ? Et que plus de la moitié des couples soient illégitimes ?