

4 Variables aléatoires discrètes

Parce que le hasard, il a bon dos. Prenons un des singes, là. Objectivement, quelles sont ses chances de sortir un livre de 200 pages au hasard ? Mettons que ça fasse une combinaison de 400 000 signes. 100 caractères sur un clavier, en général. Donc ça fera 100 puissance 400 000 possibilités. Un « 1 » avec 800 000 zéros derrière.

En gros, si un milliard d'ordinateurs essayaient chacun un milliard de combinaisons par seconde depuis le big bang, ils auraient à peine eu le temps de faire suffisamment d'essais pour tomber sur le titre. Tous ces efforts pour 200 pages. Le livre a intérêt à être bon. La haine si tu tombes sur du Dan Brown.

Boulet, Notes, tome 7, « Formicapunk ».

I Rappels sur les variables aléatoires

Définition 1 — Une variable aléatoire notée X est une **fonction** d'un ensemble Ω dans \mathbf{R} .

Cette année, le programme considère des ensembles Ω finis et donc un nombre fini de valeurs prises par X . On note :

$$X : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$$

$$\omega \mapsto X(\omega).$$

Définition 2 — Donner la **loi de probabilité** d'une variable aléatoire X , c'est donner toutes les valeurs $p_i = \mathbf{P}(X = x_i)$ où $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ est l'ensemble des valeurs prises par X .

☞ **Exemple 1** On démarre avec un exemple : on possède une urne qui contient 2 boules blanches, 3 boules rouges et 5 boules noires. L'expérience est la suivante : on mise 3 euros, et on tire une seule boule de l'urne.

- si on tire une boule blanche, on gagne 10 euros ;
- si on tire une boule rouge, on gagne 1 euro ;
- si on tire une boule noire, on ne gagne rien.

Dans cet exemple, si X est le gain final après l'expérience, X peut prendre 3 valeurs : -3 , -2 et 7 . On peut représenter la loi de probabilité de X dans un tableau :

x_i			
$\mathbf{P}(X = x_i)$			

II Espérance d'une variable aléatoire

Définition 3 (Espérance) — Soit X une variable aléatoire, on note $X(\Omega) = \{x_1; \dots; x_n\}$, et $p_i = \mathbf{P}(X = x_i)$. Par définition l'**espérance** de X est notée $\mathbf{E}(X)$ et vaut :

☞ **Exemple 2**

III Épreuve et schéma de Bernoulli

4.3.1 Épreuve de Bernoulli

Définition 4 (Épreuve de Bernoulli) — Une **épreuve de Bernoulli** est une expérience aléatoire n'admettant que deux issues : un Succès (S) et un Échec (\bar{S}). On note en général p la probabilité de Succès et $q = 1 - p$ la probabilité d'un échec.

4.3.2 Variable aléatoire de Bernoulli

Définition 5 (Variable aléatoire de Bernoulli) — Une variable aléatoire X est une **variable aléatoire de Bernoulli** si elle est à valeur dans $\{0;1\}$ où 1 est la valeur attribuée au Succès. On note $p = P(X = 1)$, p est alors le **paramètre** de la **loi de Bernoulli** que suit X :

x_i		
$P(X = x_i)$		

Proposition 9.1 — Si X est une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre p , alors :

4.3.3 Schéma de Bernoulli

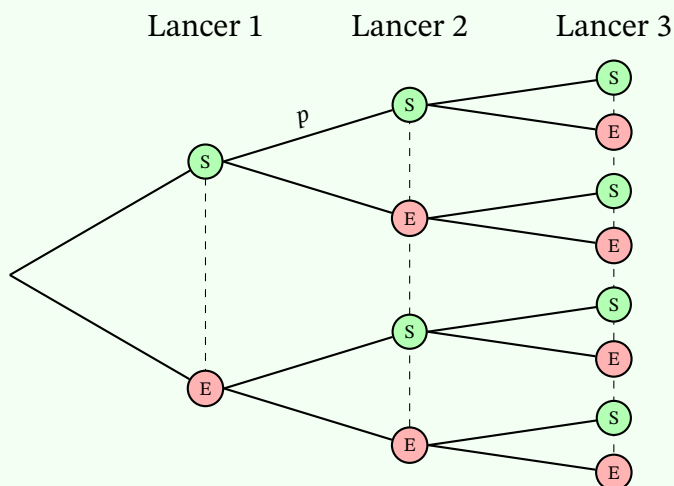
Définition 6 (Schéma de Bernoulli) — L'expérience aléatoire consistant à réaliser n épreuves de Bernoulli de **même paramètre** p et de **manière indépendante** est appelée **schéma de Bernoulli** de paramètre n et p .

Exemple 3

Si on lance 5 fois de suite un dé et qu'on s'intéresse à la face 6, on réalise un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 5$ et $p = \frac{1}{6}$.

Définition 7 (Loi binomiale) — Si on réalise un schéma de Bernoulli de paramètre n et p , la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de succès observés sur les n expériences suit une loi appelée **loi binomiale** de paramètre n et p . Cette loi est notée $\mathcal{B}(n,p)$.

Exemple 4 On lance trois fois de suite une pièce truquée qui a pour probabilité p de donner Face (qu'on considère être le "succès"). On note X le nombre de Face obtenus.



IV Coefficients binomiaux

Définition 8 (Combinaison d'un ensemble) — Soit A un ensemble fini à n éléments, k un entier naturel inférieur à n . Une combinaison de k éléments de A est une partie de A de cardinal k .

Le nombre de combinaisons de k éléments parmi n est noté $\binom{n}{k}$.

C'est le nombre de façons de choisir k éléments parmi n , indépendamment de l'ordre.

Proposition 9.2 (Combinaisons de A) — Soit A un ensemble fini à $n > 0$ éléments, k un entier naturel inférieur à n .

- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ (symétrie);
- si $n \geq 1$: $\binom{n}{1} = n$;
- $\binom{n}{0} = 1$;
- si $n \geq 2$, $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.

Théorème 9.3 (Nombre de combinaisons) — Pour tout $(k,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ tel que $k \leq n$:

Théorème 9.4 (Relation de Pascal) — Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $1 \leq k \leq n-1$:

Application de la relation de Pascal : triangle de Pascal pour le calcul des $\binom{n}{k}$:

	k						
	0	1	2	3	4	5	6
$n = 0$							
$n = 1$							
$n = 2$							
$n = 3$							
$n = 4$							
$n = 5$							
$n = 6$							

V Loi Binomiale

4.5.1 Expression de la loi binomiale

Proposition 9.5 (Expression et espérance de la loi binomiale) — Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres (n,p) ($\mathcal{B}(n,p)$). Alors pour tout entier k compris entre 0 et n on a :

Exemple 5 On considère une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{B}(7;0,2)$. La probabilité d'obtenir 4 succès sur les 7 essais est :