♦ **BAC.1** (**TesciA 2025**) **Instructions pour cet exercice :**

Chaque question de cet exercice est sous forme de Questionnaire à Choix Multiple.

Pour chaque question, il y a une et une seule bonne réponse. Une réponse fausse ou une absence de réponse n'enlève aucun point.

Vous répondrez sur votre copie en indiquant le numéro de la question et la bonne réponse correspondante, aucune justification n'est attendue.

Dans tout l'exercice, on fixe un entier naturel n supérieur ou égal à 3.

On appelle **permutation** de $\{1\ ;\ 2\ ;\ \dots\ ;\ n\}$ toute liste (ordonnée) $(i_1\ ;\ i_2\ ;\ \dots\ ; i_n)$ dans laquelle chaque entier de 1 à n est représenté exactement une fois. Pour la liste $\sigma = (i_1\ ;\ i_2\ ;\ \dots\ ; i_n)$, on écrit aussi $\sigma(k) = i_k$.

Par exemple, pour $n = 4$ la liste $\sigma = (4\ ;\ 3\ ;\ 1\ ;\ 2)$ est une permutation de $\{1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 4\}$ et $\sigma(3) = 1$ et $\sigma(4) = 2$.

On dit qu'une permutation σ de $\{1\ ;\ 2\ ;\ \dots\ ;\ n\}$ présente un **record en position** i (où $i \in \{1\ ;\ 2\ ;\ \dots\ ;\ n\}$) si $i = 1$ ou si $i > 1$ et $\sigma(i)$ est le plus grand des nombres $\sigma(1)\ ;\ \sigma(2)\ ; \dots\ ;\ \sigma(i)$.

On note $\mathcal{R}(\sigma)$ le nombre record de la permutation σ.

Par exemple, pour $n = 6$ et $\sigma = (4\ ;\ 3\ ;\ 1\ ;\ 6\ ;\ 2\ ;\ 5)$, la permutation σ a exactement 2 records, en position 1 et 4 (ainsi $\mathcal{R}(\sigma) = 2$).

Ou encore, pour $n = 7$ et $\sigma = (2\ ;\ 3;\ 5\ ;\ 1\ ;\ 4\ ;\ 7\ ;\ 6)$, la permutation σ a exactement 4 records en positions 1, 2, 3 et 6 (ainsi $\mathcal{R}(\sigma) = 4$).

Partie A - Le cas $n = 4$

Dans cette partie on étudie le cas $n = 4$.

☐ **Q01** Le nombre de permutations de $\{1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 4\}$ est :

A 6 — B 16 — C 24 — D 256 — E aucune des autres réponses

☐ **Q02** Le nombre de permutations σ de $\{1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 4\}$ telle que $\mathcal{R}(\sigma) = 4$ est :

A 1 — B 2 — C 3 — D 6 — E 11

☐ **Q03** Le nombre de permutations σ de $\{1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 4\}$ telle que $\mathcal{R}(\sigma) = 1$ est :

A 1 — B 2 — C 3 — D 6 — E 11

☐ **Q04** Le nombre de permutations σ de $\{1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 4\}$ telle que $\mathcal{R}(\sigma) = 2$ est :

A 1 — B 2 — C 3 — D 6 — E 11

Partie B - Le cas $n \geqslant 4$

☐ **Q05** Le nombre de permutations de $\{1\ ;\ 2\ ;\ \dots\ ;\ n\}$ est :

A $n\,!$ — B 2^n — C 2^{n+1} — D n^n — E aucune des autres réponses

☐ **Q06** Le nombre de permutations de $\{1\ ;\ 2\ ;\ \dots\ ;\ n\}$ ayant n records est :

A 1 — B n — C 2^n — D 2^{n-1} — E aucune des autres réponses

☐ **Q07** Le nombre de permutations de $\{1\ ;\ 2\ ;\ \dots\ ;\ n\}$ n'ayant qu'un seul record est :

$\boxed{\text{A}}$ $n+2$ $\boxed{\text{B}}$ $2(n-1)$ $\boxed{\text{C}}$ $(n-1)\,!$ $\boxed{\text{D}}$ $2^{n-1}-2$ $\boxed{\text{E}}$ $\dfrac{n(n-1)}{2}$

Partie C - Permutations ayant $n-1$ records

☐ **Q08** Pour toute permutation σ de $\{1\ ;\ 2\ ;\ \dots\ ;\ n\}$ ayant exactement $n-1$ records, on a :

$\boxed{\text{A}}$ $\sigma(n-1)=n$ ou $\sigma(n)=n$ $\boxed{\text{B}}$ $\sigma(n)=n-1$ $\boxed{\text{C}}$ $\sigma(n)<n-1$

$\boxed{\text{D}}$ $\sigma(n)=1$ $\boxed{\text{E}}$ $\sigma(n)=n$ ou $\sigma(n)=n-1$

☐ **Q09** Le nombre de permutations σ de $\{1\ ;\ 2\ ;\ \dots\ ;\ n\}$ ayant exactement $n-1$ records et telles que $\sigma(n-1)=n$ est :

$\boxed{\text{A}}$ 1 $\boxed{\text{B}}$ $(n-2)\,!$ $\boxed{\text{C}}$ n $\boxed{\text{D}}$ $n-1$ $\boxed{\text{E}}$ 0

☐ **Q10** Le nombre de permutations σ de $\{1\ ;\ 2\ ;\ \dots\ ;\ n\}$ ayant exactement $n-1$ records et telles que $\sigma(n)=n$ et $\sigma(1)\neq 1$ est :

$\boxed{\text{A}}$ 1 $\boxed{\text{B}}$ $n-2$ $\boxed{\text{C}}$ n $\boxed{\text{D}}$ $n-1$ $\boxed{\text{E}}$ 0

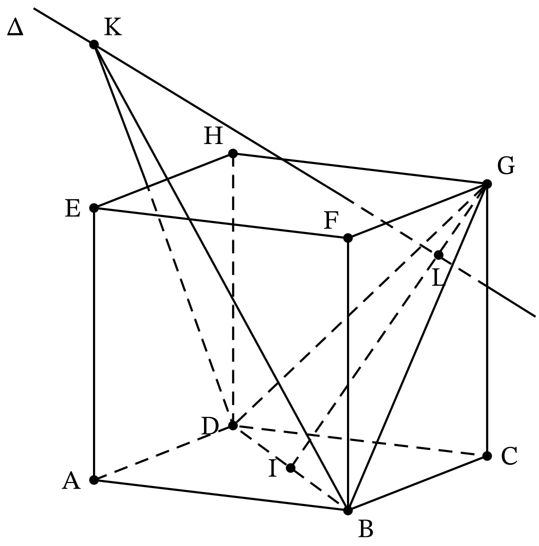
☐ **Q11** Soit k un élément de $\{2\ ;\ \dots\ ;\ n-1\}$. Le nombre de permutations σ de $\{1\ ;\ 2\ ;\ \dots\ ;\ n\}$ ayant exactement $n-1$ records et telles que $\sigma(n)=n$, $\sigma(1)=1$ et n'ayant pas de record en position k est :

$\boxed{\text{A}}$ 1 $\boxed{\text{B}}$ $k-2$ $\boxed{\text{C}}$ $n-1$ $\boxed{\text{D}}$ $1+2+\dots+(k-1)$ $\boxed{\text{E}}$ $1+2+\dots+(n-1)$

☐ **Q12** Le nombre de permutations σ de $\{1\ ;\ 2\ ;\ \dots\ ;\ n\}$ ayant exactement $n-1$ records et telles que $\sigma(n)=n$ et $\sigma(1)=1$ est :

$\boxed{\text{A}}$ 1 $\boxed{\text{B}}$ $n-2$ $\boxed{\text{C}}$ $n-1$ $\boxed{\text{D}}$ $\dfrac{n^2-3n-2}{2}$ $\boxed{\text{E}}$ $\dfrac{n^2-5n+6}{2}$

♦ **BAC.2** (**Métropole, Septembre 2024**) On considère un cube ABCDEFGH de côté 1.



Le point I est le milieu du segment [BD].
On définit le point L tel que $\overrightarrow{IL} = \frac{3}{4}\overrightarrow{IG}$.
On se place dans le repère orthonormé $\left(A\,;\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

1) a) Préciser les coordonnées des points D, B, I et G. Aucune justification n'est attendue.

b) Montrer que le point L a pour coordonnées $\left(\frac{7}{8}\,;\ \frac{7}{8}\,;\ \frac{3}{4}\right)$.

2) Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (BDG) est $x + y - z - 1 = 0$.

3) On considère la droite Δ perpendiculaire au plan (BDG) passant par L.

a) Justifier qu'une représentation paramétrique de la droite Δ est :

$$\begin{cases} x = \frac{7}{8} + t \\ y = \frac{7}{8} + t \\ z = \frac{3}{4} - t \end{cases} \quad \text{où } t \in \mathbf{R}.$$

b) Montrer que les droites Δ et (AE) sont sécantes au point K de coordonnées $\left(0\,;\ 0\,;\ \frac{13}{8}\right)$.

c) Que représente le point L pour le point K ? Justifier la réponse.

4) a) Calculer la distance KL.

b) On admet que le triangle DBG est équilatéral. Montrer que son aire est égale à $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

c) En déduire le volume du tétraèdre KDBG.
On rappelle que :

- le volume d'une pyramide est donné par la formule $\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h$ où $\mathcal{B}$ est l'aire d'une base et h la longueur de la hauteur relative a cette base ;
- un tétraèdre est une pyramide à base triangulaire.

5) On désigne par a un réel appartenant à l'intervalle $]0\,;\ +\infty[$ et on note K_a le point de coordonnées $(0\,;\ 0\,;\ a)$.

a) Exprimer le volume $\mathcal{V}_a$ de la pyramide ABCDK_a en fonction de a.

b) On note Δ_a la droite de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = t' \\ y = t' \\ z = -t' + a \end{cases} \quad \text{où } t' \in \mathbf{R}.$$

On appelle I_a le point d'intersection de la droite Δ_a avec le plan (BDG).
Montrer que les coordonnées du point I_a sont $\left(\frac{a+1}{3}\,;\ \frac{a+1}{3}\,;\ \frac{2a-1}{3}\right)$.

c) Déterminer, s'il existe, un réel strictement positif a tel que le tétraèdre GDBK$_a$ et la pyramide ABCDK_a sont de même volume.

♦ **BAC.3** (**Amérique du Nord, J1 2024**) Un jeu vidéo récompense par un objet tiré au sort les joueurs ayant remporté un défi. L'objet tiré peut être « commun » ou « rare ». Deux types d'objets communs ou rares sont disponibles, des épées et des boucliers.

Les concepteurs du jeu vidéo ont prévu que :

- la probabilité de tirer un objet rare est de 7 % ;
- si on tire un objet rare, la probabilité que ce soit une épée est de 80 % ;
- si on tire un objet commun, la probabilité que ce soit une épée est de 40 %.

Les parties A *et* B *sont indépendantes.*

Partie A

Un joueur vient de remporter un défi et tire au sort un objet. On note :

- R l'évènement « le joueur tire un objet rare » ;
- E l'évènement « le joueur tire une épée » ;
- $\overline{R}$ et $\overline{E}$ les évènements contraires des évènements R et E.

1) Dresser un arbre pondéré modélisant la situation, puis calculer $\mathbf{P}(R \cap E)$.

2) Calculer la probabilité de tirer une épée.

3) Le joueur a tiré une épée. Déterminer la probabilité que ce soit un objet rare. Arrondir le résultat au millième.

Partie B

Un joueur remporte 30 défis.

On note X la variable aléatoire correspondant au nombre d'objets rares que le joueur obtient après avoir remporté 30 défis. Les tirages successifs sont considérés comme indépendants.

1) Déterminer, en justifiant, la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X. Préciser ses paramètres, ainsi que son espérance.

2) Déterminer $\mathbf{P}(X < 6)$. Arrondir le résultat au millième.

3) Déterminer la plus grande valeur de k telle que $\mathbf{P}(X \geqslant k) \geqslant 0{,}5$. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

4) Les développeurs du jeu vidéo veulent proposer aux joueurs d'acheter un « ticket d'or » qui permet de tirer N objets. La probabilité de tirer un objet rare reste de 7 %.

Les développeurs aimeraient qu'en achetant un ticket d'or, la probabilité qu'un joueur obtienne au moins un objet rare lors de ces N tirages soit supérieure ou égale à 0,95.

Déterminer le nombre minimum d'objets à tirer pour atteindre cet objectif. On veillera à détailler la démarche mise en œuvre.

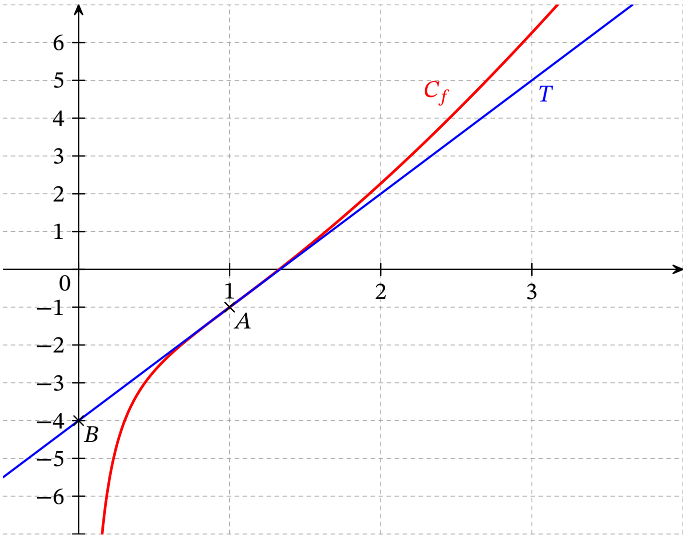
♦ **BAC.4** (**Amérique du Nord, J1 2024**) Le but de cet exercice est d'étudier la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = x\ln\left(x^2\right) - \frac{1}{x}.$$

Partie A - Lectures graphiques

On a tracé ci-dessous la courbe représentative $(\mathcal{C}_f)$ de la fonction f, ainsi que la droite (T), tangente à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au point A de coordonnées $(1\,;\,-1)$.

Cette tangente passe également par le point B$(0\,;\,-4)$.



1) Lire graphiquement $f'(1)$ et donner l'équation réduite de la tangente (T).
2) Donner les intervalles sur lesquels la fonction f semble convexe ou concave.
Que semble représenter le point A pour la courbe $(\mathcal{C}_f)$?

Partie B - Étude analytique

1) Déterminer, en justifiant, la limite de f en $+\infty$, puis sa limite en 0.
2) On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
   a) Déterminer $f'(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
   b) Montrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$,

$$f''(x) = \frac{2(x+1)(x-1)}{x^3}.$$

3) a) Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
   b) Étudier les variations de la fonction f', puis le signe de $f'(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
   En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
4) a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
   b) Donner la valeur arrondie au centième de α et montrer que α vérifie :

$$\alpha^2 = \exp\left(\frac{1}{\alpha^2}\right).$$

♦ **BAC.5** (**Asie, J2 2024**) On considère la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = x^2 - x\ln(x).$$

On admet que f est deux fois dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$.
On note f' la fonction dérivée de la fonction f et f'' la fonction dérivée de la fonction f'.

Partie A - Étude de la fonction f

1) Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.
2) Pour tout réel x strictement positif, calculer $f'(x)$.
3) Montrer que pour tout réel x strictement positif :

$$f''(x) = \frac{2x-1}{x}.$$

4) Étudier les variations de la fonction f' sur $]0\,;\,+\infty[$, puis dresser le tableau des variations de la fonction f' sur $]0\,;\,+\infty[$.
   On veillera à faire apparaître la valeur exacte de l'extremum de la fonction f' sur $]0\,;\,+\infty[$.
   Les limites de la fonction f' aux bornes de l'intervalle de définition ne sont pas attendues.
5) Montrer que la fonction f est strictement croissante sur $]0\,;\,+\infty[$.

Partie B - Étude d'une fonction auxiliaire pour la résolution de l'équation $f(x) = x$

On considère dans cette partie la fonction g définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$g(x) = x - \ln(x).$$

On admet que la fonction g est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$, on note g' sa dérivée.

1) Pour tout réel strictement positif, calculer $g'(x)$, puis dresser le tableau des variations de la fonction g.
   Les limites de la fonction g aux bornes de l'intervalle de définition ne sont pas attendues.
2) On admet que 1 est l'unique solution de l'équation $g(x) = 1$.
   Résoudre, sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, l'équation $f(x) = x$.

Partie C - Étude d'une suite récurrente

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = f(u_n) = u_n^2 - u_n\ln(u_n).$$

1) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$\frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1.$$

2) Justifier que la suite (u_n) converge.
   On appelle ℓ la limite de la suite (u_n) et on admet que ℓ vérifie l'égalité $f(\ell) = \ell$.
3) Déterminer la valeur de ℓ.

♦ **BAC.6** (**Asie, J2 2024**) *Léa passe une bonne partie de ses journées à jouer à un jeu vidéo et s'intéresse aux chances de victoire de ses prochaines parties.*

Elle estime que si elle vient de gagner une partie, elle gagne la suivante dans 70 % des cas.

Mais si elle vient de subir une défaite, d'après elle, la probabilité qu'elle gagne la suivante est de 0,2.

De plus, elle pense avoir autant de chance de gagner la première partie que de la perdre.

On s'appuiera sur les affirmations de Léa pour répondre aux questions de cet exercice.

Pour tout entier naturel n non nul, on définit les évènements suivants :

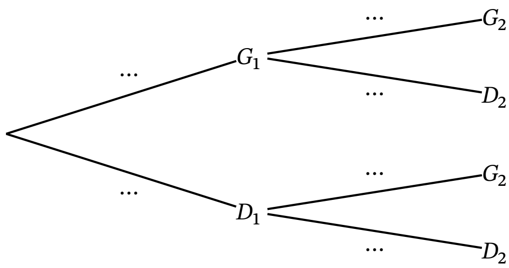
- G_n : « Léa gagne la n-ième partie de la journée » ;
- D_n : « Léa perd la n-ième partie de la journée ».

Pour tout entier naturel n non nul, on note g_n la probabilité de l'évènement G_n.

On a donc $g_1 = 0{,}5$.

1) Quelle est la valeur de la probabilité conditionnelle $\mathbf{P}_{G_1}(D_2)$?

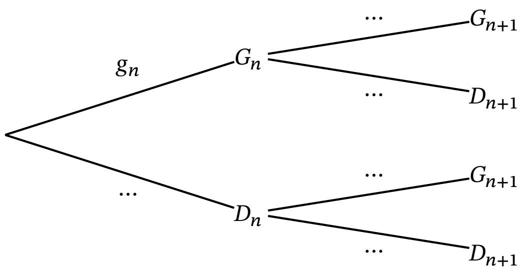
2) Recopier et compléter l'arbre des probabilités ci-dessous qui modélise la situation pour les deux premières parties de la journée :



3) Calculer g_2.

4) Soit n un entier naturel non nul.

a) Recopier et compléter l'arbre des probabilités ci-dessous qui modélise la situation pour les n-ième et $(n+1)$-ième parties de la journée.



b) Justifier que pour tout entier naturel n non nul,

$$g_{n+1} = 0{,}5 g_n + 0{,}2.$$

5) Pour tout entier naturel n non nul, on pose $v_n = g_n - 0{,}4$.

a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique.
On précisera son premier terme et sa raison.

b) Montrer que, pour tout entier naturel n non nul :

$$g_n = 0{,}1 \times 0{,}5^{n-1} + 0{,}4.$$

6) Étudier les variations de la suite (g_n).

7) Donner, en justifiant, la limite de la suite (g_n).
Interpréter le résultat dans le contexte de l'énoncé.

8) Déterminer, par le calcul, le plus petit entier n tel que

$$g_n - 0{,}4 \leqslant 0{,}001.$$

9) Recopier et compléter les lignes 4, 5 et 6 de la fonction suivante, écrite en langage Python, afin qu'elle renvoie le plus petit rang à partir duquel les termes de la suite (g_n) sont tous inférieurs ou égaux à $0{,}4 + e$, où e est un nombre réel strictement positif.

```
1  def seuil(e) :
2      g = 0.5
3      n = 1
4      while ... :
5          g = 0.5 * g + 0.2
6          n = ...
7      return (n)
```