

# Chapitre 8 | Équations différentielles

*La seule autorité en maths, c'est soi-même.*  
Alain Connes (1947-), Médaille Fields 1983.

Dans tout le chapitre,  $I$  est un intervalle non réduit à un point.

## I Primitive

### 8.1.1 Équation différentielle $y' = f$

**Définition 1 (Équation différentielle  $y' = f$ )** — Soit  $f$  une fonction de  $I$  dans  $\mathbf{R}$ . On dit qu'une fonction  $F$  vérifie l'équation différentielle  $y' = f$  si  $F$  est dérivable sur  $I$  et que pour tout  $x$  appartenant à  $I$ ,  $F$  est dérivable et :

$$F'(x) = f(x).$$

**Remarque 1** Une équation différentielle est donc une équation où l'inconnue est une fonction.

**Définition 2 (Primitive)** — On dit qu'une solution de l'équation  $y' = f$  est une **primitive** de  $f$ .

**Proposition 8.1 (Linéarité)** — Si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions qui admettent des primitives  $F$  et  $G$  sur  $I$ , alors :

- $F + G$  est une primitive de  $f + g$  sur  $I$ ;
- pour tout réel  $k$ ,  $kF$  est une primitive de  $kf$  sur  $I$ .

### 8.1.2 Primitives de $f$

**Théorème 8.2 (Solutions de l'équation homogène)** — Les solutions de l'équation  $y' = 0$  sont les fonctions constantes sur  $I$ .

**Remarque 2** Attention, le fait que  $I$  soit un intervalle est fondamental.

**Proposition 8.3 (Structure des solutions)** — Soit  $f$  une fonction de  $I$  dans  $\mathbf{R}$ . On suppose que  $G$  est une solution particulière de l'équation  $y' = f$  et on note  $\mathcal{S}$  l'ensemble des solutions de cette équation différentielle. Alors :

$$H \text{ solution de } y' = f \Leftrightarrow H - G \text{ solution de } y' = 0.$$

Autrement dit,  $\mathcal{S}$  est de la forme  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 + G$  où  $\mathcal{S}_0$  est l'ensemble des solutions de l'équation homogène  $y' = 0$  et  $G$  est une solution particulière de l'équation  $y' = f$ .

**Proposition 8.4 (Ensemble des primitives de  $f$ )** — Soit  $f$  une fonction de  $I$  dans  $\mathbf{R}$ . Si  $G$  et  $H$  sont des solutions de l'équation  $y' = f$ , alors  $G$  et  $H$  ne diffèrent que d'une constante, autrement dit :

$$\exists k \in \mathbf{R}, \quad \forall x \in I, \quad G(x) = H(x) + k.$$

**Théorème 8.5 (Admis)** — Si  $f$  est continue sur  $I$ , alors  $f$  admet des primitives sur  $I$ .

### 8.1.3 Primitives usuelles

#### Théorème 8.6 (Primitives des fonctions usuelles) —

| Fonction $f$                         | $\mathcal{D}_f$  | Primitive $F$                                                        | Domaine de validité |
|--------------------------------------|------------------|----------------------------------------------------------------------|---------------------|
| $f(x) = mx + p$                      | $\mathbf{R}$     | $F(x) = \frac{m}{2}x^2 + px + k, \quad k \in \mathbf{R}$             | $\mathbf{R}$        |
| $f(x) = x^2$                         | $\mathbf{R}$     | $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + k, \quad k \in \mathbf{R}$                  | $\mathbf{R}$        |
| $n \in \mathbf{N}; \quad f(x) = x^n$ | $\mathbf{R}$     | $F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + k, \quad k \in \mathbf{R}$            | $\mathbf{R}$        |
| $f(x) = 1/x$                         | $\mathbf{R}_+^*$ | $F(x) = \ln x + k, \quad k \in \mathbf{R}$                           | $\mathbf{R}_+^*$    |
| $n > 1; \quad f(x) = 1/x^n$          | $\mathbf{R}_+^*$ | $F(x) = \frac{1}{1-n} \frac{1}{x^{n-1}} + k, \quad k \in \mathbf{R}$ | $\mathbf{R}_+^*$    |
| $f(x) = 1/\sqrt{x}$                  | $\mathbf{R}_+^*$ | $F(x) = 2\sqrt{x} + k, \quad k \in \mathbf{R}$                       | $\mathbf{R}_+^*$    |
| $a \neq 0; \quad f(x) = e^{ax}$      | $\mathbf{R}$     | $F(x) = \frac{1}{a}e^{ax} + k, \quad k \in \mathbf{R}$               | $\mathbf{R}$        |
| $f(x) = \sin(x)$                     | $\mathbf{R}$     | $F(x) = -\cos(x) + k, \quad k \in \mathbf{R}$                        | $\mathbf{R}$        |
| $f(x) = \cos(x)$                     | $\mathbf{R}$     | $F(x) = \sin(x) + k, \quad k \in \mathbf{R}$                         | $\mathbf{R}$        |

**Remarque 3** La formule  $(u \circ v)' = v' \times u' \circ v$  permet de donner des primitives. Par exemple, donner une primitive de  $x \mapsto \frac{2x}{1+x^2}$ .

### 8.1.4 Unicité de la solution avec condition initiale

**Théorème 8.7** — Si  $f$  admet des primitives sur  $I$ , l'équation différentielle  $y' = f$  munie de la condition initiale  $y(x_0) = y_0$  admet une unique solution sur  $I$ .

## II Équation différentielle $y' = ay + b$

### 8.2.1 Équation différentielle $y' = ay + b$

**Définition 3 (Équation différentielle  $y' = ay + b$ )** — Soient  $a$  et  $b$  deux réels.

On dit qu'une fonction  $g$  vérifie l'équation différentielle  $y' = ay + b$  si  $g$  est dérivable sur  $I$  et que pour tout  $x$  appartenant à  $I$  on a :

$$g'(x) = ag(x) + b.$$

L'équation  $y' = ay$  est appelée l'**équation homogène** associée à l'équation différentielle  $y' = ay + b$ .

### 8.2.2 Structure des solutions

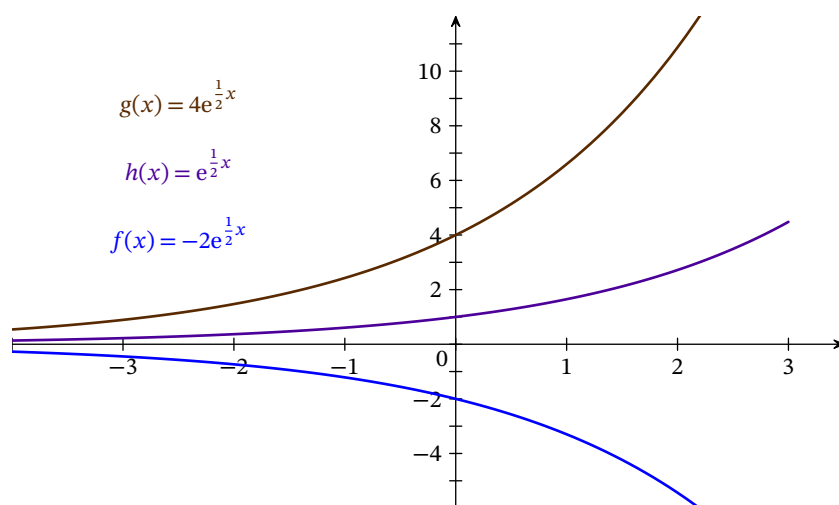
**Proposition 8.8 (Équation homogène)** — L'ensemble des solutions de l'équation

$$y' = ay$$

est l'ensemble des fonctions de la forme  $x \mapsto \lambda e^{ax}$  où  $\lambda \in \mathbf{R}$ .

### 8.2.3 Allure des solutions

Donner une équation différentielle dont les trois fonctions ci-dessous sont solutions :



**Proposition 8.9 (Solution particulière de l'équation  $y' = ay + b$ )** — Une solution particulière de l'équation  $y' = ay + b$  est la fonction constante :

$$g : x \mapsto -\frac{b}{a}.$$

**Proposition 8.10 (Structure des solutions de l'équation  $y' = ay + b$ )** — L'ensemble des solutions de l'équation

$$y' = ay + b$$

est de la forme  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 + g$  où  $\mathcal{S}_0$  est l'ensemble des solutions de l'équation **homogène**  $y' = ay$  et  $g$  est une solution particulière de l'équation  $y' = ay + b$ .

### 8.2.4 Unicité de la solution avec condition initiale

**Théorème 8.11** — L'équation différentielle  $y' = ay + b$  munie de la condition initiale  $y(x_0) = y_0$  admet une unique solution sur  $I$ .

#### Exemple 1

- Résoudre le problème différentiel : 
$$\begin{cases} y' = 4 - 2y \\ y(1) = 8 \end{cases}$$

## III Compléments

### 8.3.1 Équations différentielles $y' = a(x)y + b(x)$

**Théorème 8.12 (Structure des solutions de l'équation  $y' = a(x)y + b(x)$ )** — Si  $a$  et  $b$  sont des fonctions continues sur  $I$ , alors l'équation différentielle  $y' = a(x)y + b(x)$  admet des solutions et l'ensemble solution  $\mathcal{S}$  est de la forme :

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 + g,$$

où

- $\mathcal{S}_0$  est l'ensemble des solutions de  $y' = a(x)y$ , c'est-à-dire :

$$\mathcal{S}_0 = \{f, \quad f : x \mapsto ke^{A(x)}\},$$

où  $A$  est une primitive de  $a$ ;

- $g$  est une solution particulière de l'équation  $y' = a(x)y + b(x)$ .

**Méthode 8.1 : Variation de la constante**

Les solutions de l'équation homogène étant de la forme  $x \mapsto ke^{A(x)}$ , on recherche une solution particulière de la forme  $x \mapsto k(x)e^{A(x)}$ , en déterminant la fonction  $k$  par injection dans l'équation différentielle.

**Exemple 2**

- Résoudre  $y' = 2y + \sin x$  sur  $\mathbf{R}$ .
- Résoudre  $y' = -\frac{y}{x} + e^{3x}$  sur  $\mathbf{R}_+^*$ .

**8.3.2 Équations différentielles du second ordre à coefficients constants**

**Théorème 8.13 (Solutions des équations différentielles du second ordre)** — Soit  $a$  et  $b$  deux nombres (réels ou complexes). L'ensemble des solutions à valeurs complexes de l'équation  $y'' + ay' + by = 0$  est :

$$\begin{cases} \mathcal{S} = \{y : x \mapsto \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}\} & \text{si } \Delta \neq 0; \\ \mathcal{S} = \{y : x \mapsto (\lambda x + \mu)e^{rx}\} & \text{si } \Delta = 0, \end{cases}$$

où  $\Delta$  est le discriminant du polynôme  $X^2 + aX + b$ , et où  $r_1$  et  $r_2$  sont les racines (réelles ou complexes) de ce polynôme (notée  $r$  en cas de racine double).

Dans le cas où les coefficients  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont réels, il est naturel de vouloir obtenir une expression réelle des solutions. La proposition suivante nous les donne :

**Proposition 8.14 (Expressions réelles des équations différentielles du second ordre)** — Soit  $y'' + ay' + by = 0$  une équation différentielle linéaire à coefficients constants réels. Soit  $\mathcal{S}_{\mathbf{C}}$  l'ensemble de toutes les solutions à valeurs complexes et  $\mathcal{S}_{\mathbf{R}}$  l'ensemble des solutions à valeurs réelles. Alors :

$$\mathcal{S}_{\mathbf{R}} = \{\Re(y), \quad y \in \mathcal{S}_{\mathbf{C}}\}.$$

**Exemple 3**

- Résoudre  $y'' - 3y' + 2y = 0$  sur  $\mathbf{R}$ .
- Résoudre  $y'' + \omega^2 y = 0$  sur  $\mathbf{R}$ .