

5 | Nombres complexes et géométrie

Notre arithmétique générale, qui dépasse si largement la géométrie antique, est dans sa totalité la création de l'époque moderne. Partie du concept de nombres entiers, elle a progressivement élargi son domaine. Aux nombres entiers sont venus s'ajouter les nombres fractionnaires, aux nombres rationnels, les nombres irrationnels, aux nombres positifs, les nombres négatifs, aux nombres réels, les nombres imaginaires. Cette progression s'est cependant toujours effectuée d'un pas craintif et hésitant. Les premiers algébristes appelaient encore fausses les racines négatives des équations (et elles le sont effectivement là où le problème auquel elles se réfèrent est présenté de telle façon que la nature de la grandeur cherchée n'admet pas d'opposé). Mais de même qu'on a peu de scrupules à accueillir les nombres fractionnaires au sein de l'arithmétique générale, alors qu'il existe une multitude de choses dénombrables pour lesquelles un nombre fractionnaire est dénué de sens, de même on ne devrait pas refuser aux nombres négatifs des droits identiques à ceux des nombres positifs, sous prétexte qu'une infinité de choses n'admettent pas d'opposés. La réalité des nombres négatifs est amplement justifiée, puisqu'ils trouvent en mille autres occasions un support adéquat. En vérité, depuis longtemps, un fait est désormais établi : seules les grandeurs imaginaires, qui s'opposent aux grandeurs réelles (grandeurs imaginaires jadis, et parfois encore aujourd'hui appelées de façon maladroite impossibles) n'ont toujours pas acquis droit de cité ; elles sont seulement tolérées ; elles ressemblent donc davantage à un jeu de signes vides de contenu réel, auxquels on refuse résolument un support imaginable, sans vouloir pour autant dédaigner le riche tribut que ce jeu de signes verse en fin de compte au trésor des relations entre grandeurs réelles.

Carl Friedrich Gauss (1777-1855).

I Vision géométrique des nombres complexes

On a vu qu'un nombre complexe $z = a + ib$ peut se voir de façon algébrique comme la donnée de deux nombres réels. On peut alors identifier z , via (a, b) à un élément de $\mathbf{R}^2$, et se demander à quoi correspondent les opérations sur les complexes, du point de vue géométrique.

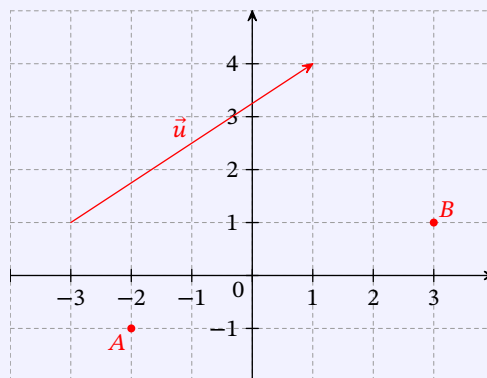
5.1.1 Affixe d'un point, d'un vecteur

Définition 1 (Affixe d'un point, d'un vecteur) — Soit M un point du plan de coordonnées (a, b) .

- L'**affixe** du point M est le nombre complexe $z_M = a + ib$;
- L'**affixe** du vecteur $\overrightarrow{OM}$ est aussi le nombre z ;
- Pour tout vecteur $\vec{u}$ du plan, il existe un unique point A tel que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$. L'affixe de $\vec{u}$ est alors l'affixe du point A .

Illustration : Quelle est l'affixe de A ? De B ? Du vecteur $\vec{u}$? Du vecteur $\overrightarrow{AB}$? Du vecteur $\overrightarrow{BA}$?

-
-
-
-
-



Proposition 5.1 (Calculs vectoriels) — Si $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont deux vecteurs d'affixe z_1 et z_2 , alors :

- Le vecteur $\vec{u}_1 + \vec{u}_2$ a pour affixe $z_1 + z_2$;
- Si $\lambda \in \mathbf{R}$, le vecteur $\lambda \vec{u}_1$ a pour affixe λz_1 .

Proposition 5.2 (Affixe de $\overrightarrow{AB}$, milieu d'un segment) — Si A et B sont deux points d'affixes z_A et z_B , alors $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$.

De plus, le point I milieu de $[AB]$ a pour affixe $z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$.

5.1.2 Modules et argument d'un nombre complexe

Jusqu'à nouvel ordre, toutes les coordonnées et affixes sont écrites suivant un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Définition 2 (Module, argument) —

Soit M un point du plan d'affixe $z = a + ib$.

- Le **module** de z (noté $|z|$) est la valeur positive

$$|z_M| = OM.$$

On le note parfois ρ ;

- Si $z \neq 0$, un **argument** de z , noté $\arg(z)$, est l'angle $(\vec{i}; \overrightarrow{OM})$, parfois noté θ .
- (ρ, θ) sont les **coordonnées polaires** du point M .

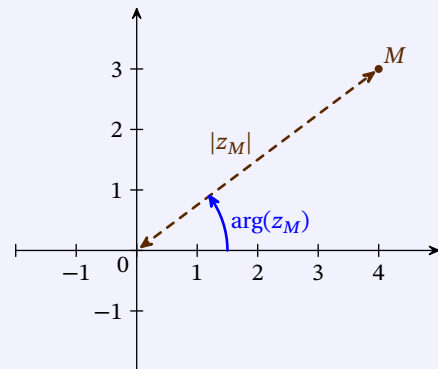
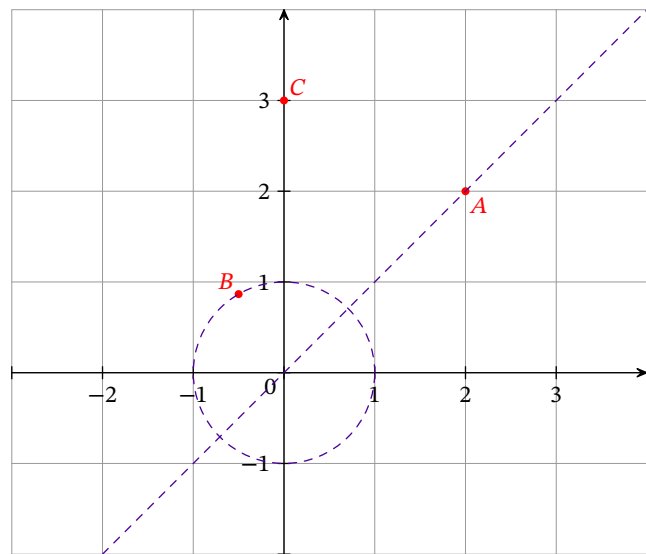


Illustration : Quelles sont les coordonnées polaires de A , B et C sachant que

$$z_A = 2 + 2i, z_B = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \text{ et } z_C = 3i?$$

-
-
-



Proposition 5.3 (Propriétés du module) — Si z et z' sont deux nombres complexes et n un entier non nul, alors :

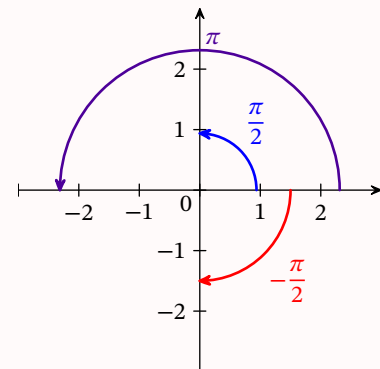
- $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\bar{z}}$
- $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
- $|\bar{z}| = |z|$
- $|z \times z'| = |z| \times |z'|$
- $\left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}$ (si $z' \neq 0$)
- $|z^n| = |z|^n$
- Inégalité triangulaire :** $|z + z'| \leq |z| + |z'|$

Proposition 5.4 (Mesure principale) — Un argument de z est défini à $2k\pi$ près où $k \in \mathbb{Z}$; la **mesure principale** de cet argument est l'unique valeur comprise dans l'intervalle $] -\pi; \pi]$.

Proposition 5.5 (Valeurs particulières de l'argument) —

Soit z un nombre complexe non nul et $k \in \mathbb{Z}$.

- $\arg z = 2k\pi \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}^+$;
- $\arg z = \pi + 2k\pi \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}^-$;
- $\arg z = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Leftrightarrow z$ est imaginaire pur et $\Im(z) > 0$;
- $\arg z = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \Leftrightarrow z$ est imaginaire pur et $\Im(z) < 0$.



II Formes trigonométriques et exponentielles d'un nombre complexe

Dans toute cette partie, z est un nombre complexe non nul d'affixe $z = a + ib$.

5.2.1 Forme trigonométrique

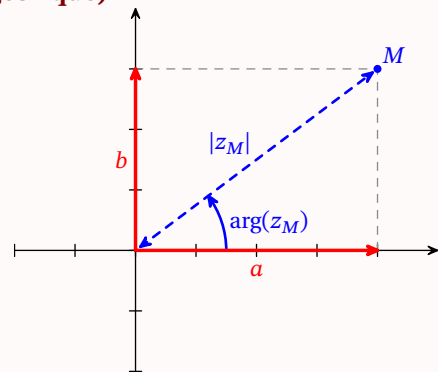
Proposition 5.6 (De la forme trigonométrique à la forme algébrique) —

On a pour tout nombre complexe z :

$$z = |z|(\cos(\arg z) + i \sin(\arg z)).$$

Ceci est la **forme trigonométrique** du nombre z . Donc, connaissant $|z|$ et $\arg z$:

- $a = |z| \cos(\arg z)$;
- $b = |z| \sin(\arg z)$.



Application : Déterminer la forme algébrique de z tel que $|z| = 2$ et $\arg z = \frac{\pi}{3}$.

Proposition 5.7 (De la forme algébrique à la forme trigonométrique) — Inversement, on détermine la forme trigonométrique de z à partir de a et b :

- $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$;
- $\cos(\arg z) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$;
- $\sin(\arg z) = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Application : Déterminer la forme trigonométrique de $z = -3 - \sqrt{3}i$.

5.2.2 Forme exponentielle

Théorème 5.8 (admis) — On admet que pour tout réel θ , on a :

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta).$$

Et l'on admet que la formule $e^{x+y} = e^x e^y$ et toutes celles en découlant s'étendent aux nombres complexes.

Proposition 5.9 (Formules trigonométriques) — On a pour tous nombres réels a et b :

- $\cos(a + b) = \cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b)$
- $\cos(a - b) = \cos(a) \cos(b) + \sin(a) \sin(b)$
- $\sin(a + b) = \cos(b) \sin(a) + \sin(b) \cos(a)$
- $\sin(a - b) = \cos(b) \sin(a) - \sin(b) \cos(a)$
- $\cos(2a) = 2 \cos^2(a) - 1 = 1 - 2 \sin^2(a)$
- $\sin(2a) = 2 \cos(a) \sin(a)$

Proposition 5.10 (Formules d'Euler) — Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Proposition 5.11 (Module de l'exponentielle d'un imaginaire pur) — Pour tout nombre réel θ : $|e^{i\theta}| = 1$ et $\arg(e^{i\theta}) = \theta + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Proposition 5.12 (forme exponentielle) — Pour tout nombre complexe z , on a :

$$z = |z|e^{i \arg z}.$$

Ceci est appelée la **forme exponentielle** de z .

Application : Déterminer la forme exponentielle de $z = 5 - 5i$.

Proposition 5.13 (Opérations sur les formes exponentielles) — Si z et z' sont deux nombres complexes tels que $z = \rho_1 e^{i\theta_1}$ et $z' = \rho_2 e^{i\theta_2}$ alors :

$$\bullet z \times z' = \rho_1 \rho_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)} \quad \bullet \frac{z}{z'} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)} \quad \bullet \text{Si } n \in \mathbb{Z}, z^n = \rho_1^n e^{in\theta_1}$$

Proposition 5.14 (Propriétés des arguments) — À $2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) près, on a pour tous nombres complexes z et z' non nuls :

$$\begin{aligned} \bullet \arg(\bar{z}) &= -\arg z & \bullet \arg\left(\frac{z}{z'}\right) &= \arg z - \arg z' \\ \bullet \arg(-z) &= \arg z + \pi & \bullet \text{Si } n \in \mathbb{Z}, \arg(z^n) &= n \arg z \\ \bullet \arg(z \times z') &= \arg z + \arg z' \end{aligned}$$

Théorème 5.15 (Formule de Moivre) — Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et tout entier $n \in \mathbb{Z}$:

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta).$$

Application de la forme exponentielle : Calculer $(1+i)^n$, pour tout entier n .

III Application à la géométrie

Dans toute cette partie, on se donne trois points du plan A, B et C , d'affixes respectives a, b et c .

5.3.1 Interprétation du module

Proposition 5.16 (Distance entre deux points) — La distance AB est égale à $|a - b|$ et à $|b - a|$.

Proposition 5.17 (Caractérisations des cercles et médiatrices) — Si $r \geq 0$, l'ensemble des points d'affixe z tels que $|z - a| = r$ est le cercle de centre A et de rayon r .
L'ensemble des points d'affixe z tels que $|z - a| = |z - b|$ est la médiatrice du segment $[AB]$.

Proposition 5.18 (CNS d'égalité de longueurs) — On suppose ici que A, B et C sont distincts.
La longueur AB est égale à la longueur AC si et seulement si $\left| \frac{b-a}{c-a} \right| = 1$.

5.3.2 Interprétation de l'argument

Proposition 5.19 (Interprétation géométrique de $\frac{c-a}{b-a}$) — On suppose ici que A, B et C sont distincts.

$$\begin{aligned} \bullet (\vec{i}; \vec{AB}) &= \arg(b - a) + 2k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} \\ \bullet (\vec{AB}; \vec{AC}) &= \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) + 2k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

En particulier :

$$\begin{aligned} \bullet A, B \text{ et } C \text{ sont alignés si et seulement si } \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) \text{ est égal à } \pi \text{ ou } -\pi \text{ (à } 2k\pi \text{ près).} \\ \bullet (AB) \text{ et } (AC) \text{ sont perpendiculaires si et seulement si } \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) \text{ est égal à } \frac{\pi}{2} \text{ ou } -\frac{\pi}{2} \text{ (à } 2k\pi \text{ près).} \end{aligned}$$

IV Groupe des racines de l'unité

Définition 3 (Cercle unité) — On appelle cercle unité, et on note $\mathbf{U}$, l'ensemble des nombres complexes de module 1.

Proposition 5.20 (Forme exponentielle des nombres de module 1) — Les nombres complexes de module 1 s'écrivent $e^{i\theta}$ où $\theta \in \mathbb{R}$.

Proposition 5.21 (Groupe des racines de l'unité) — $(\mathbf{U}, +, \times)$ est un groupe abélien, c'est-à-dire $1 \in \mathbf{U}$ et pour tous $(z, z') \in \mathbf{U}^2$:

- $zz' = z'z$;
- $zz' \in \mathbf{U}$;
- $\frac{z}{z'} \in \mathbf{U}$.

Définition 4 (Racines n -ième de l'unité) — Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on appelle **racines n -ième de l'unité** l'ensemble noté $\mathbf{U}_n$:

$$\mathbf{U}_n = \left\{ e^{\frac{2i\pi k}{n}}, \quad 0 \leq k \leq n-1 \right\}.$$

Proposition 5.22 (Équation polynomiale associée) — Si $z \in \mathbf{U}_n$ alors z est solution de l'équation :

$$z^n = 1.$$

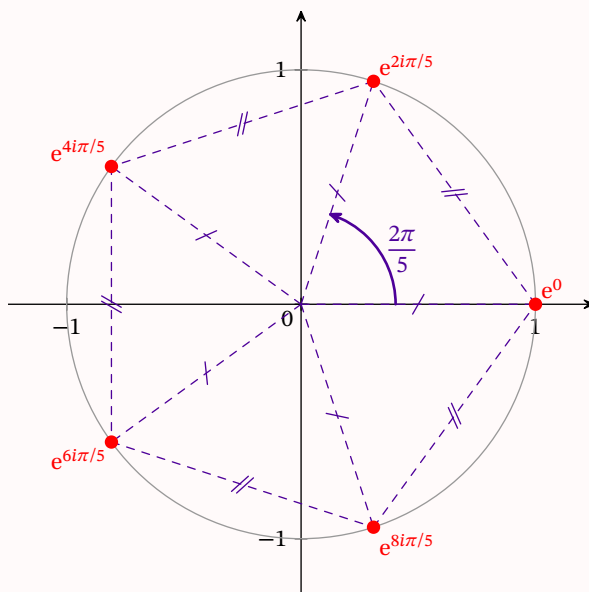
On admet pour l'instant que $\mathbf{U}_n$ est exactement l'ensemble des racines de cette équation.

Proposition 5.23 (Racines n -ième de l'unité) —

Pour tout entier naturel n non nul :

- $\mathbf{U}_n$ est de cardinal n ;
- $1 \in \mathbf{U}_n$ et $\mathbf{U}_n$ est stable par produit et quotient;
- $\mathbf{U}_n \subset \mathbf{U}$;
- Si $n \geq 3$, les points dont les affixes sont les racines n -ièmes de l'unité forment un polygone régulier à n côtés.

Le groupe $\mathbf{U}_5$:



Le groupe $\mathbf{U}_8$:

