Chapitre 7

Géométrie vectorielle - 2

The most exciting phrase to hear in science, the one that heralds new discoveries, is not "Eureka !" (I found it !) but "That's funny ..."

Isaac Asimov (1920 - 1992).

I Colinéarité

7.1.1 Définition

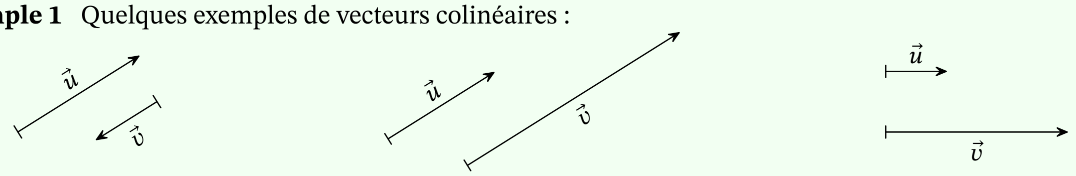
Définition 1 (Vecteurs colinéaires) — Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** si et seulement si il existe deux réels λ et μ tels qu'au moins l'un des deux est non nul et :

Remarque 1 On peut remarquer que si par exemple λ est non nul, alors on peut réécrire : $\vec{u} = -\frac{\mu}{\lambda}\vec{v}$.

En d'autres termes, l'un des vecteurs peut s'écrire comme un « multiple » de l'autre : ils ont donc **même direction**.

Et si λ est nul ?... Réfléchir à pourquoi le résultat reste vrai.

☞ **Exemple 1** Quelques exemples de vecteurs colinéaires :



Voici maintenant une proposition qui nous permet de faire le lien entre la colinéarité et l'alignement des points dans le plan.

Proposition 7.1 (Admis) — *Soient A, B, C et D quatre points du plan. On a :*

$$(AB) \,//\, (CD) \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{CD} \text{ sont colinéaires.}$$

$$A,B,C \text{ alignés} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AC} \text{ sont colinéaires.}$$

7.1.2 Caractérisation de la colinéarité

Définition 2 (Déterminant de deux vecteurs) — Soients $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs du plan, écrits dans un repère orthonormé. Alors on appelle **déterminant** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le nombre :

Proposition 7.2 (Condition Nécessaire et Suffisante de colinéarité) — *Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs du plan. Alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires **si et seulement si** leurs coordonnées sont proportionnelles, c'est-à-dire **si et seulement si** :*

$$\det(\vec{u},\vec{v}) = 0.$$

Remarquons que cette propriété ne dépend pas du repère choisi !

☞ **Exemple 2** On considère les vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix}$.

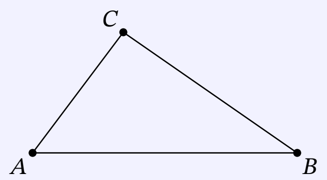
Si $\vec{u'} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v'} = \begin{pmatrix} 19 \\ -4 \end{pmatrix}$,

II Droites remarquables du triangle

Définition 3 (Droites remarquables) —

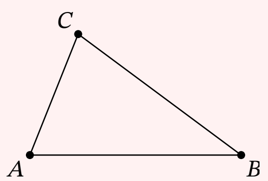
Soit ABC un triangle.

- La **médiatrice** de $[AB]$ est la perpendiculaire à (AB) passant par le milieu de $[AB]$;
- La **médiane** issue de A est la droite passant par A et le milieu de $[BC]$;
- La **hauteur** issue de C est la perpendiculaire à (AB) passant par C.



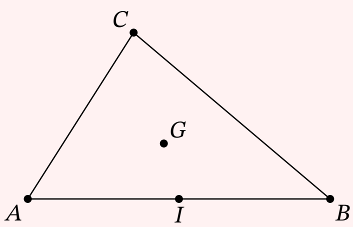
7.2.1 Propriétés des droites remarquables

Théorème 7.3 (Centre du cercle circonscrit) —
Les trois médiatrices d'un triangle sont concourantes en un point nommé le ***centre du cercle circonscrit*** *du triangle (Ω).*
Ce point est le centre de l'unique cercle passant par les trois points A, B et C.



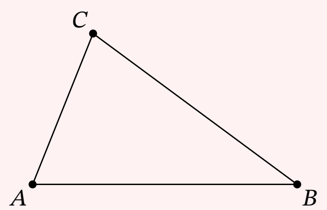
Théorème 7.4 (Centre de gravité d'un triangle) —
Soit ABC un triangle, I le milieu de $[AB]$.
Alors les trois médianes du triangle sont concourantes en un point qu'on appelle le centre de gravité du triangle. De plus, si on note ce point G, on a :

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CI}.$$



Théorème 7.5 (Concours des Hauteurs) —

Les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes en un point H nommé ***orthocentre*** *du triangle.*



7.2.2 Droite d'Euler

Théorème 7.6 (Droite d'Euler) — *Soit ABC un triangle. On note :*

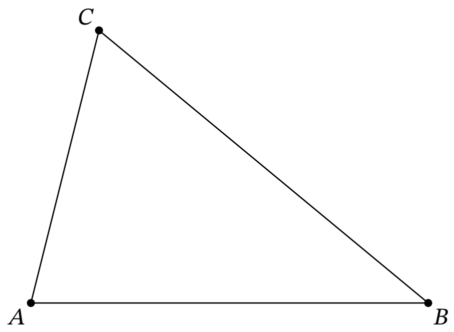
- *Ω le centre de son cercle circonscrit ;*
- *G son centre de gravité ;*
- *H son orthocentre.*

Alors on a :

$$\overrightarrow{\Omega H} = 3\overrightarrow{\Omega G}.$$

En particulier, Ω, H et G sont ***alignés****.*

Illustration :

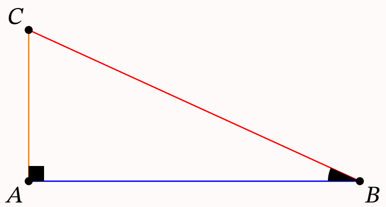


7.2.3 Trigonométrie avec les formules du collège

Proposition 7.7 (Formules dans un triangle rectangle) —

Soit ABC un triangle rectangle en A et soit α l'angle en B. Alors :

- $\cos\alpha = \dfrac{\textit{adjacent}}{\textit{hypoténuse}} = \dfrac{AB}{CB}$.
- $\sin\alpha = \dfrac{\textit{opposé}}{\textit{adjacent}} = \dfrac{AC}{CB}$.
- $\tan\alpha = \dfrac{\textit{opposé}}{\textit{hypoténuse}} = \dfrac{AC}{AB}$.

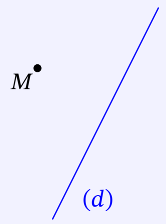


III Projeté orthogonal sur une droite et compléments

7.3.1 Projeté orthogonal

Définition 4 (Projeté orthogonal) —

Soit M un point et (d) une droite. On appelle **projeté orthogonal** (H sur la figure) du point M le point d'intersection de la perpendiculaire à (d) passant par M et de (d).



Proposition 7.8 (Caractérisation du projeté orthogonal) — *Le projeté orthogonal H d'un point M sur une droite (d) est le point de (d) tel que, pour tout point M' de (d) on a :*

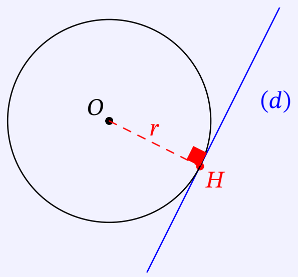
$$MM' \geqslant MH$$

avec égalité si et seulement si $M' = H$. La distance MH est appelée ***distance du point à la droite*** (d).

7.3.2 Tangente à un cercle

Définition 5 (Tangente à un cercle) —

Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O de rayon r. Une tangente à ce cercle est une droite (T) telle que la distance entre O et (T) soit égale à r.

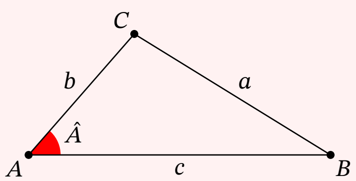


7.3.3 Formule d'Al-Kashi

Théorème 7.9 (Formule d'Al-Kashi) —

Soit ABC un triangle avec les notations ci-contre, on a :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\left(\hat{A}\right).$$

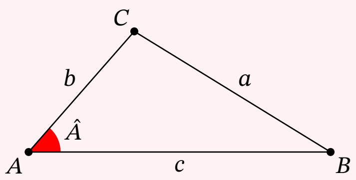


7.3.4 Aire d'un triangle

Théorème 7.10 (Aire d'un triangle) —

Soit ABC un triangle avec les notations ci-contre. Si on note $\mathcal{A}$ son aire, alors :

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}bc\sin\hat{A}.$$



IV Exercices

Colinéarité

Dans les exercices 1 à 6, on se place dans un repère $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$.

♦ **GEOM.1** Déterminer si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires dans les cas suivants :

1) $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\-10\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-6\\15\end{pmatrix}$

2) $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-6\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-4\\-12\end{pmatrix}$

3) $\vec{u}\begin{pmatrix}\frac{3}{11}\\-\frac{2}{5}\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-\frac{5}{11}\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}$

4) $\vec{u}\begin{pmatrix}\sqrt{5}-\sqrt{2}\\3+\sqrt{6}\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3-\sqrt{6}\\\sqrt{5}+\sqrt{2}\end{pmatrix}$

♦ **GEOM.2** Déterminer si les droites (AB) et (CD) sont parallèles dans les cas suivants :

1) $A(8;5)$, $B(2;2)$, $C(-3;0)$, $D(5;4)$;

2) $A(-2;3)$, $B(0;2)$, $C(3;-1)$, $D(-1;2)$;

3) $A(2;1)$, $B(5;-3)$, $C(0;3)$, $D(6;-5)$.

♦ **GEOM.3** Déterminer si les points A, B et C sont alignés dans les cas suivants :

1) $A(2;3)$, $B(5;7)$, $C(-7;-9)$;

2) $A(5;7)$, $B(0;1)$, $C\left(-\frac{3}{4};0\right)$;

3) $A(1;1)$, $B(-2;-1)$, $C\left(\frac{5}{2};2\right)$;

4) $A(3;4)$, $B(-7;-3)$, $C(0;2)$.

♦ **GEOM.4** Déterminer x pour que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires.

1) $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x\\2+x\end{pmatrix}$; **2)** $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-x\\3x\end{pmatrix}$;

3) $\vec{u}\begin{pmatrix}x-2\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}9\\x-2\end{pmatrix}$.

♦ **GEOM.5** On considère les points :

$$A(2;3),\quad B(5;7),\quad C(-6;-8),\quad D(-3;1)$$

1) Les points A, B et C sont-ils alignés ?

2) $\vec{u}$ a pour abscisse 4 et pour ordonnée $y_{\vec{u}}$. Déterminer $y_{\vec{u}}$ sachant que $\overrightarrow{AC}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

3) F a pour abscisse x_F et pour ordonnée 4. Déterminer x_F sachant que A, B et F sont alignés.

4) G a pour abscisse x_G et pour ordonnée 7. Déterminer x_G sachant que (AB) et (DG) sont parallèles.

♦ **GEOM.6** On considère les points :

$$A(3;0),\ B(-3;-1),\ C(-1;2),\ G\left(-5;\frac{1}{2}\right)$$

1) Calculer les coordonnées de D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.

2) Calculer les coordonnées de I, centre de $ABCD$.

3) Calculer les coordonnées de E tel que :

$$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{3}{4}\overrightarrow{CA}$$

4) Démontrer que B, E et D sont alignés.

5) Calculer les coordonnées de F tel que :

$$\overrightarrow{FG}=2\overrightarrow{FC}$$

6) Démontrer que (BC) et (OF) sont parallèles.

♦ **GEOM.7** Soit ABC un triangle. Le point D est défini par :

$$\overrightarrow{AD}=4\overrightarrow{AC}-3\overrightarrow{AB}$$

1) Faire une figure.

2) On pose $\vec{\imath}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{\jmath}=\overrightarrow{AC}$. Donner les coordonnées de tous les points de la figure dans le repère $\left(A;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$.

3) Démontrer que B, C et D sont alignés.

♦ **GEOM.8** Soit ABC un triangle. Les points M et N sont définis par :

$$\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\qquad\text{et}\qquad\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AC}$$

1) Faire une figure.

2) Donner les coordonnées de tous les points de la figure dans le repère $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$.

3) Démontrer que (MN) et (AC) sont parallèles.

♦ **GEOM.9** Soit ABC un triangle. Les points M, N et P sont définis de la façon suivante :

M est le symétrique de A par rapport à C,

$\overrightarrow{BN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BP}=3\overrightarrow{CP}$.

1) Déterminer les coordonnées de tous les points de la figure dans le repère $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$.

2) Démontrer que M, N et P sont alignés.

♦ **GEOM.10** $ABCD$ est un parallélogramme. Les points E et F sont définis par :

$$\overrightarrow{DE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DB}\qquad\text{et}\qquad\overrightarrow{DF}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{DB}$$

Les points G et H sont tels que $BAEG$ et $BAFH$ soient des parallélogrammes.

Démontrer, en utilisant un repère, que les points C, G et H sont alignés.

♦ **GEOM.11** $ABCD$ est un parallélogramme. Les points M, N et P sont définis par :

$$\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AC}, \qquad \overrightarrow{BN} = 2\overrightarrow{BC},$$
$$-\overrightarrow{PA} + 2\overrightarrow{PB} + 2\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{CD}$$

Démontrer, en utilisant un repère, que les droites (MN) et (CP) sont parallèles.

Droites remarquables

♦ **GEOM.12** Soit deux points A et B distincts qui appartiennent à un cercle de centre O. Démontrer que la médiatrice du segment $[AB]$ passe par O.

♦ **GEOM.13** Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et A un point extérieur à ce cercle $\mathcal{C}$. Soit $\mathcal{C}'$ le cercle de centre A passant par O. On suppose que $\mathcal{C}'$ coupe $\mathcal{C}$ en E et F.
Démontrer que (OA) est la médiatrice du segment $[EF]$.

♦ **GEOM.14** Soit $ABCD$ un parallélogramme de centre O. Soit I le milieu de $[AD]$ et J le milieu de $[AB]$. On considère :

- la droite $\mathcal{D}_1$ passant par I et perpendiculaire à $[AD]$,
- la droite $\mathcal{D}_2$ passant par J et perpendiculaire à $[AB]$,
- K le point d'intersection de $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$.

1) Justifier que K existe.

2) Que peut-on dire des droites (OK) et (BD) ?

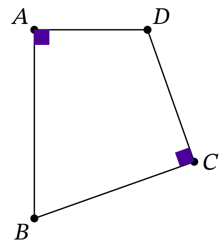
♦ **GEOM.15** Soit ABC un triangle et H l'orthocentre de ce triangle. Quel est le point de concours des hauteurs du triangle BHC ? Du triangle AHB ? Du triangle AHC ?

♦ **GEOM.16** Soit A et B deux points, $\mathcal{D}$ une droite perpendiculaire à (AB) et O un point de $\mathcal{D}$.
La perpendiculaire à la droite (OB) passant par A coupe (OB) en A'. Soit H le point d'intersection de (AA') avec $\mathcal{D}$.
Démontrer que les droites (OA) et (BH) sont perpendiculaires.

♦ **GEOM.17** On considère la figure ci-dessous, et on suppose que :

- les droites (AB) et (DC) se coupent en M ;
- les droites (AD) et (BC) se coupent en N.

Démontrer que les droites (BD) et (MN) sont perpendiculaires.



♦ **GEOM.18** Soit $ABCD$ un parallélogramme de centre O, E le symétrique de C par rapport à B et G le point de concours des droites (AB) et (OE).

1) Que représente le point G pour le triangle AEC ?

2) En déduire que la droite (CG) coupe le segment $[AE]$ en son milieu.

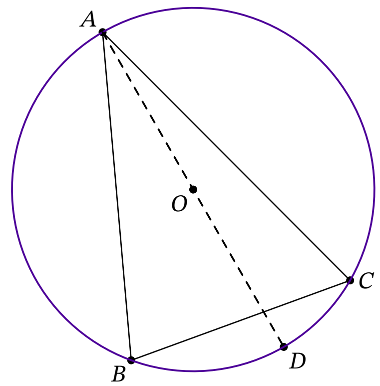
♦ **GEOM.19** Soit ABC un triangle et I le milieu de $[BC]$. La parallèle à (AC) passant par I coupe $[AB]$ en J et la parallèle à (AB) passant par I coupe $[AC]$ en K.
Démontrer que les droites (AI), (BK) et (CJ) sont concourantes.

♦ **GEOM.20** Soit ABC un triangle rectangle en A, et O le milieu de l'hypoténuse.
Soit A' le symétrique de A par rapport à O.

1) Quelle est la nature du quadrilatère $ABA'C$?

2) Montrer que OA est égal à la moitié de BC.

♦ **GEOM.21** (**Brevet 1994**) A, B, C sont trois points distincts d'un cercle centre O et $[AD]$ un diamètre de ce cercle.
On fera une figure qu'on complétera au fur et à mesure.



1) Quelle est la nature des triangles ABD et ACD ?

2) La parallèle à (BD) passant par C coupe (AB) en E. Démontrer que (CE) est une hauteur du triangle ABC.

3) La perpendiculaire à (BC) passant par A coupe le cercle en A et J, la droite (CE) en H et la droite (BC) en I.

  a) Que représente H pour le triangle ABC ?

  b) En déduire que (BH) est perpendiculaire à (AC).

  c) Montrer que (BH) est parallèle à (DC).

4) Démontrer que $BHCD$ est un parallélogramme. On appelle K le point d'intersection de ses diagonales. Que représente K pour le segment $[HD]$?

5) a) Quelle est la nature du triangle ADJ ? En déduire que (CI) et (DJ) sont parallèles.

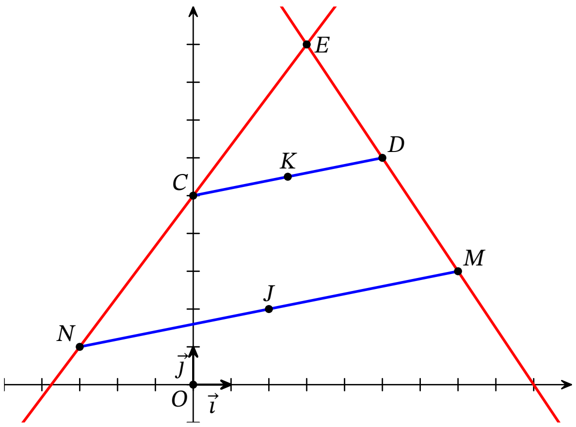
b) Montrer que I est le milieu de $[HJ]$.

☞ **Indications exercice 21 :** On pourra utiliser le triangle HDJ, après avoir précisé la position de K sur le segment $[HD]$).

Géométrie

Sauf mention contraire, toutes les coordonnées des exercices 22 à 30 sont données dans un repère orthonormé.

♦ **GEOM.22** Soient les points $M(7;3)$, $N(-3;1)$, $C(0;5)$, $D(5;6)$ et $E(3;9)$.



1) Montrer que le quadrilatère $MNCD$ est un trapèze.

2) Montrer que E est le point d'intersection des droites (NC) et (MD).

3) Soient J et K les milieux respectifs des segments $[NM]$ et $[CD]$.
Calculer les coordonnées des points J et K.

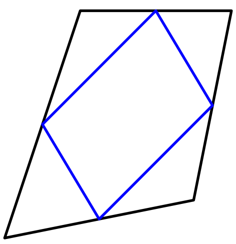
4) Montrer que les points E, J et K sont alignés.

5) Calculer les longueurs EN et EC.

6) En déduire sans calcul les valeurs de $\dfrac{MN}{DC}$ et $\dfrac{ME}{DE}$.

7) On note $\mathcal{S}$ l'aire du triangle ECD et $\mathcal{S}'$ l'aire du triangle ENM. Sans calculs, donner la valeur de $\dfrac{\mathcal{S}'}{\mathcal{S}}$.

♦ **GEOM.23** (**Théorème de Varignon**) Soit un quadrilatère quelconque $ABCD$ et I, J, K et L les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$.

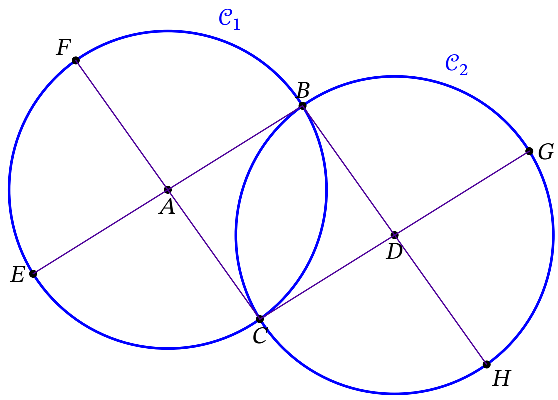


1) Faire une figure.

2) Démontrer que $\vec{IJ} = \dfrac{1}{2}\vec{AC}$.

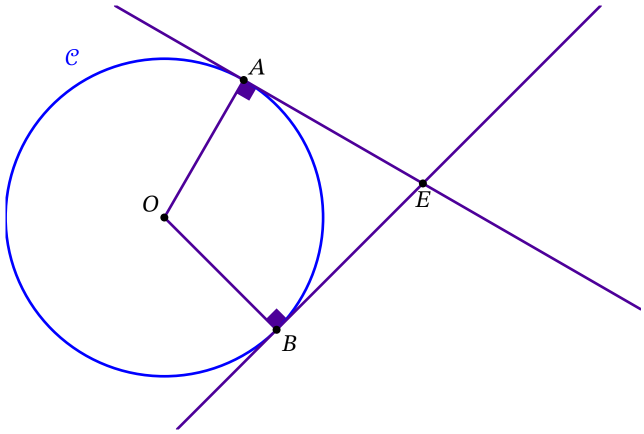
3) En déduire que $IJKL$ est un parallélogramme.

♦ **GEOM.24** On considère deux cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ de même rayon et de centres respectifs A et D. $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont sécants en B et C.
$[BE]$ et $[CF]$ sont des diamètres de $\mathcal{C}_1$; $[BH]$ et $[CG]$ sont des diamètres de $\mathcal{C}_2$.



Démontrer que C est le milieu du segment $[EH]$.

♦ **GEOM.25** Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O, A et B deux points du cercle $\mathcal{C}$ tels que $[AB]$ ne soit pas un diamètre de $\mathcal{C}$. La perpendiculaire à (OA) passant par A coupe la perpendiculaire à (OB) passant par B en un point E.

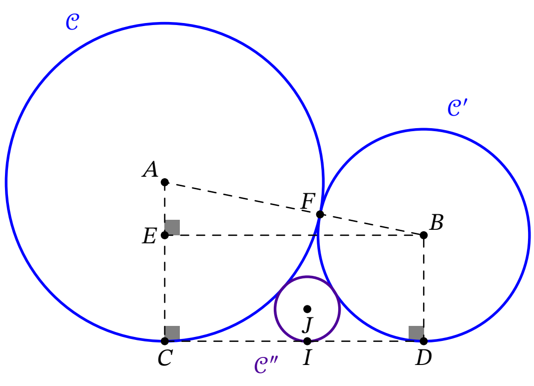


1) Démontrer que ABE est isocèle en E.

2) En déduire que (OE) est la médiatrice de $[AB]$.

3) **(*)** Exprimer l'aire du quadrilatère $OAEB$ en fonction de l'angle $\alpha = \widehat{EOA}$ et du rayon r du cercle $\mathcal{C}$.

♦ **GEOM.26** (**Sangaku**) Un sangaku est une énigme géométrique japonaise. On se donne deux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ tangents en F comme sur la figure ci-dessous. Le cercle $\mathcal{C}$ a pour centre A et pour rayon R, et le cercle $\mathcal{C}'$ a pour centre B et pour rayon r. L'objectif est de déterminer les caractéristiques du cercle $\mathcal{C}''$, tangents aux cercles $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ et à la droite (CD). On suppose que $R \geqslant r$.



1) a) Montrer que $CD^2 = (R+r)^2 - (R-r)^2$.

b) En déduire une expression simplifiée de CD.

2) a) En appliquant la question précédente aux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}''$ et aux cercles $\mathcal{C}'$ et $\mathcal{C}''$, montrer que :

$$\frac{CI}{DI} = \sqrt{\frac{R}{r}}.$$

b) En déduire que :

$$CI = \frac{2R}{1+\sqrt{\dfrac{R}{r}}}.$$

c) En déduire que le rayon r' du cercle $\mathcal{C}''$ est égal à :

$$r' = \frac{R}{\left(1+\sqrt{\dfrac{R}{r}}\right)^2}.$$

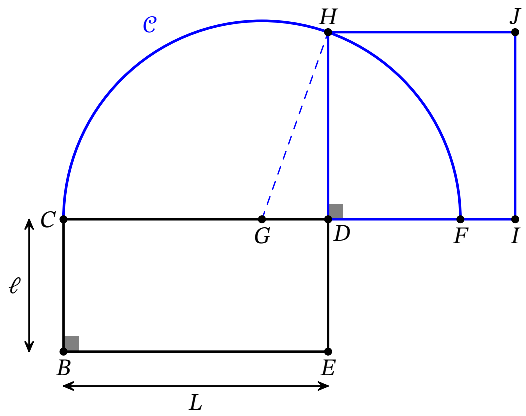
d) Montrer que l'on a :

$$\frac{1}{\sqrt{R}} + \frac{1}{\sqrt{r}} = \frac{1}{\sqrt{r'}}.$$

3) Application : reproduire cette figure dans le cas où $R = 9$ cm et $r = 4$ cm.

♦ **GEOM.27** (**Quadrature du rectangle**) La quadrature d'une figure consiste à construire un carré ayant la même aire que cette figure. On propose la construction suivante :

- $BCDE$ est un rectangle où $BE > BC$;
- $DF = DE$;
- G est le centre du cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[CF]$.
- H est le point d'intersection de (DE) et $\mathcal{C}$.



Le but est donc de montrer que l'aire du carré $HDIJ$ construit à partir du rectangle $BCDE$ a même aire que celui-ci. On note $L = BE$ et $\ell = BC$.

1) Montrer que $GD = \dfrac{L-\ell}{2}$.

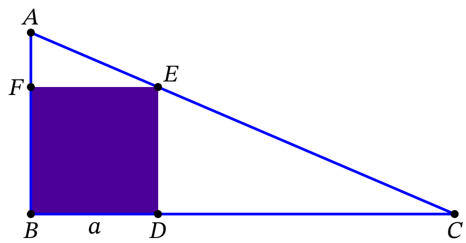
2) En déduire que :

$$DH^2 = \left(\frac{L+\ell}{2}\right)^2 - \left(\frac{L-\ell}{2}\right)^2.$$

3) En déduire DH puis conclure.

Projetés orthogonaux

♦ **GEOM.28** Soit ABC un triangle rectangle en A tel que $AB = 3$ et $BC = 7$. Les points D, E et F appartiennent respectivement aux segments $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$ et sont tels que $BDEF$ est un carré. On note a le côté du carré.



1) a) Justifier que (ED) est parallèle à (AB).

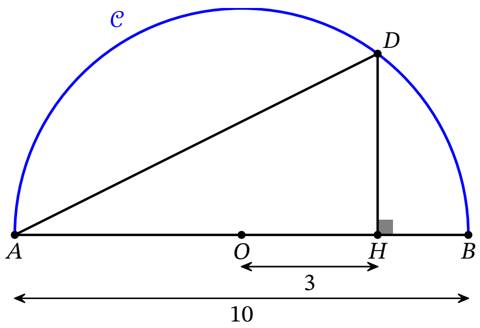
b) En déduire que a vérifie $\dfrac{a}{7-a} = \dfrac{3}{7}$.

c) En déduire l'aire du carré $BDEF$.

2) a) Calculer l'aire du triangle ABC, puis la longueur AC.

b) En déduire la distance du point B à la droite (AC).

♦ **GEOM.29** Soit $[AB]$ un segment de milieu O tel que $AB = 10$ et $\mathcal{C}$ un demi-cercle de diamètre $[AB]$, H est le point du segment $[OB]$ tel que $OH = 3$.
La perpendiculaire à (AB) passant par H coupe $\mathcal{C}$ en D.



1) a) Quelle est la nature du triangle OHD ?

b) En déduire la longueur DH.

c) En déduire l'aire $\mathcal{A}$ du triangle AOD.

2) a) Déterminer la longueur AH.

b) Calculer la longueur AD.

3) On note d la distance du point O à la droite (AD).

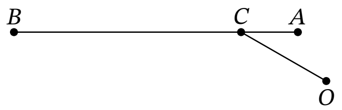
a) Exprimer d en fonction de $\mathcal{A}$ et AD.

b) En déduire la valeur de d.

Un calcul en voiture

♦ **GEOM.30** Un véhicule est équipé d'un essuie-glace dont le support métallique est modélisé par la réunion de deux segments : un segment $[AB]$, qui porte le balai en caoutchouc sur toute sa longueur, et un segment $[OC]$ qui relie de centre de rotation O à un point C du segment $[AB]$ tels que :

- $CA = a$;
- $CB = 4a$;
- $OC = \sqrt{3}a$;
- $\widehat{OCA} = 30°$.

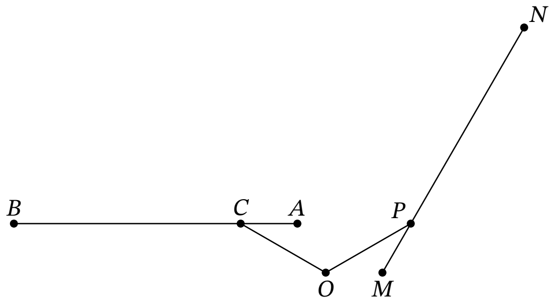


1) Soit I le projeté orthogonal de A sur (OC).

a) Exprimer CI en fonction de a.

b) En déduire que le triangle AOC est isocèle.

2) Lorsqu'il essuie le pare-brise du véhicule, l'essuie-glace tourne autour du point O. En début de course, le balai en caoutchouc est en position horizontale (à la position du segment $[AB]$) ; en fin de course, il est "penché" de telle manière qu'il coïncide avec la position du segment $[MN]$ (voir figure), de telle manière que (OM) soit parallèle à (AB).



a) Déterminer l'angle dont a tourné le dispositif autour du point O pour passer d'une position à l'autre.

b) En déduire en fonction de a, l'aire de la surface balayée par l'essuie-glace.