

Chapitre 8 | Fonctions de référence

Toute loi physique doit être empreinte de beauté mathématique.

Paul Dirac (1902 - 1984).

I Fonction carrée

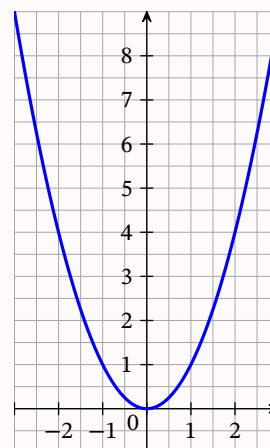
8.1.1 Définition, variations

Définition 1 (Fonction carrée) — On appelle **fonction carrée** la fonction f définie pour tout réel x par :

Proposition 8.1 — Pour tout réel x , on a : $x^2 \geq 0$.

Proposition 8.2 (Sens de variation, représentation graphique) — La fonction carrée est **strictement décroissante** sur $] -\infty; 0]$ et **strictement croissante** sur $[0; +\infty[$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Variations de $x \mapsto x^2$			



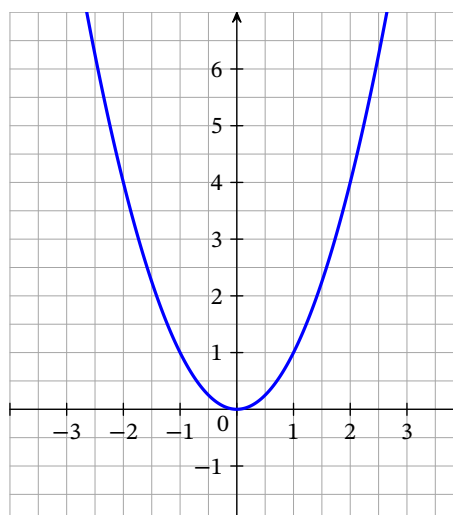
8.1.2 Équations et inéquations

Proposition 8.3 (Solutions d'équations) — On considère l'équation $x^2 = a$:

- Si $a < 0$, alors cette équation **n'a pas de solutions**;
- Si $a = 0$, alors cette équation admet $x = 0$ **comme unique solution**;
- Si $a > 0$, alors cette équation admet **deux solutions distinctes** : $x = \sqrt{a}$ et $x = -\sqrt{a}$.

Illustration :

- L'équation $x^2 = -1$
- L'équation $x^2 = 0$
- L'équation $x^2 = 4$



Proposition 8.4 (Solutions d'inéquations) — On considère l'équation $x^2 < a$:

- Si $a \leq 0$, alors cette inéquation **n'a pas de solutions**;
- Si $a > 0$, alors cette inéquation admet **un intervalle de valeurs solutions** : $]-\sqrt{a}; \sqrt{a}[$.

Exemple 1

- L'inéquation $x^2 < 8$
- L'inéquation $x^2 \leq 10$
- L'inéquation $x^2 > 9$

Proposition 8.5 (Parité) — La fonction carrée est **paire** :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad f(x) = f(-x).$$

Cela implique que **sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées**.

II Fonction racine carrée

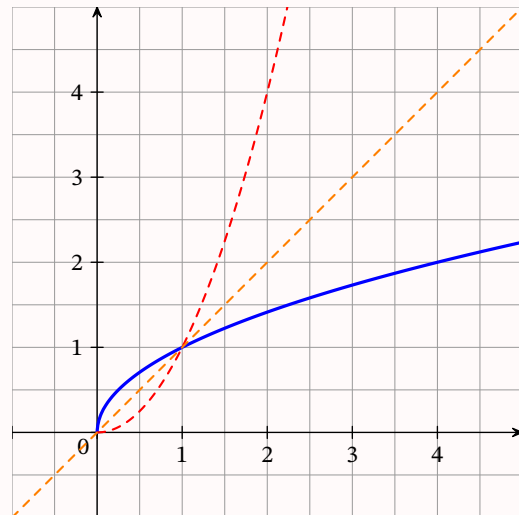
8.2.1 Définition, variations

Définition 2 (Fonction racine carrée) — On appelle **fonction racine carrée** la fonction f définie pour tout réel positif x par :

$$f(x) = \sqrt{x}.$$

Proposition 8.6 (Sens de variation, représentation graphique) — La fonction racine carrée est **strictement croissante** sur $[0; +\infty[$:

x	0	$+\infty$
Variations de $x \mapsto \sqrt{x}$		



Remarque : les courbes de la fonction carrée et racine carrée sont **symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$** .

8.2.2 Équations et inéquations

Proposition 8.7 (Solutions d'équations) — On considère l'équation $\sqrt{x} = a$:

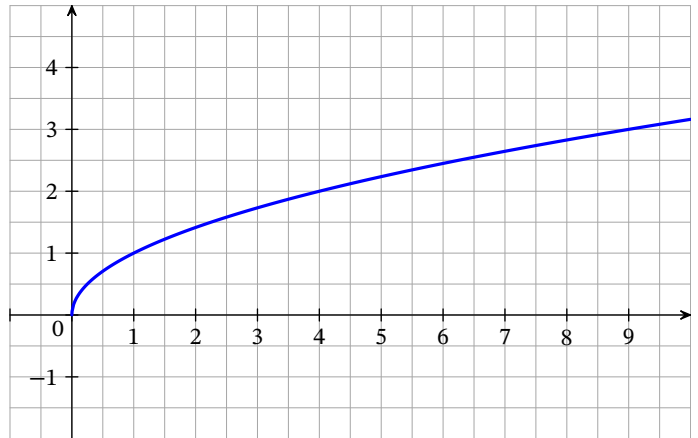
- Si $a < 0$, alors cette équation **n'a pas de solutions**;
- Si $a \geq 0$, alors cette équation admet $x = a^2$ **comme unique solution**;

Proposition 8.8 (Solutions d'inéquations) — On considère l'équation $\sqrt{x} < a$:

- Si $a \leq 0$, alors cette inéquation **n'a pas de solutions**;
- Si $a > 0$, alors cette inéquation admet **l'ensemble $[0; a^2[$ comme solutions**;

Illustration :

- L'équation $\sqrt{x} = 3$
- L'équation $\sqrt{x} = -\frac{3}{2}$
- L'inéquation $\sqrt{x} < 2$



Proposition 8.9 (Calculs) — Pour tous nombres a et b positifs on a :

- $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$
- $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$

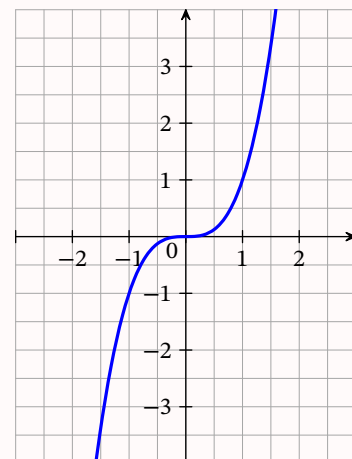
III Fonction cube

8.3.1 Définition, variations

Définition 3 (Fonction cube) — On appelle **fonction cube** la fonction f définie pour tout réel x par :

Proposition 8.10 (Sens de variation, représentation graphique) — La fonction cube est **strictement croissante** sur \mathbf{R} :

x	$-\infty$	$+\infty$
Variations de $x \mapsto x^3$		

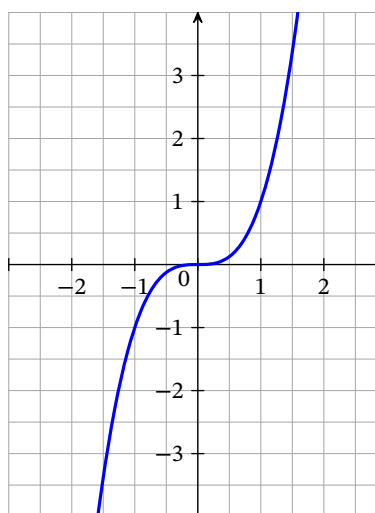


Proposition 8.11 (Solutions d'équations et d'inéquations) —

- On considère l'équation $x^3 = a$ où $a \in \mathbf{R}$.
Cette équation admet **une unique solution**, notée $x = \sqrt[3]{a}$.
- On considère l'inéquation $x^3 < a$ où $a \in \mathbf{R}$.
Cette inéquation admet **comme solution l'ensemble** $] -\infty; \sqrt[3]{a}[$.

Illustration :

- L'équation $x^3 = 2$
- L'inéquation $x^3 < 1$

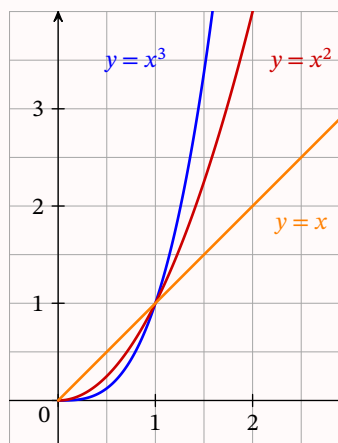


8.3.2 Positions relatives

Proposition 8.12 (Positions relatives de x , x^2 et x^3) —

- $\forall x \in [0,1]$,
- $\forall x \geq 1$,

Illustration :



IV Fonction inverse

8.4.1 Définition, variations

Définition 4 (Fonction inverse) — On appelle **fonction inverse** la fonction f définie pour tout réel $x \neq 0$ (c'est-à-dire définie sur \mathbb{R}^*) par :

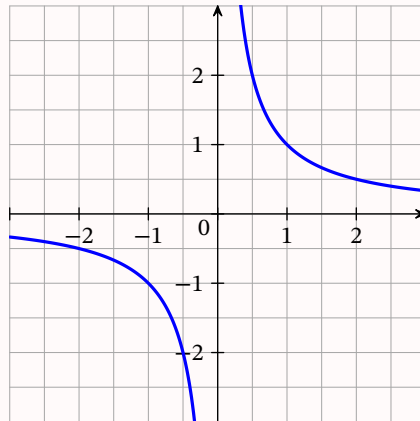
Sa courbe représentative est appelée une **hyperbole**.

Proposition 8.13 (Sens de variation) — La fonction inverse est **strictement décroissante** sur $]-\infty; 0[$ et **strictement décroissante** sur $]0; +\infty[$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Variations de $x \mapsto \frac{1}{x}$			

Conséquence : si a et b sont négatifs tels que $a < b$, alors $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$,

et si a et b sont positifs tels que $a < b$, alors $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

Proposition 8.14 (Représentation graphique de la fonction inverse) —**Proposition 8.15 (Parité) —** La fonction inverse est **impaire**, c'est-à-dire :

$$\forall x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}, \quad f(x) = -f(-x).$$

Cela implique que **sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'origine du repère.**

8.4.2 Équations et inéquations**Proposition 8.16 (Solutions d'équations) —** On considère l'équation $\frac{1}{x} = a$:

- Si $a = 0$, alors cette équation **n'a pas de solutions** ;
- Si $a \neq 0$, alors cette équation admet $x = \frac{1}{a}$ **comme unique solution.**

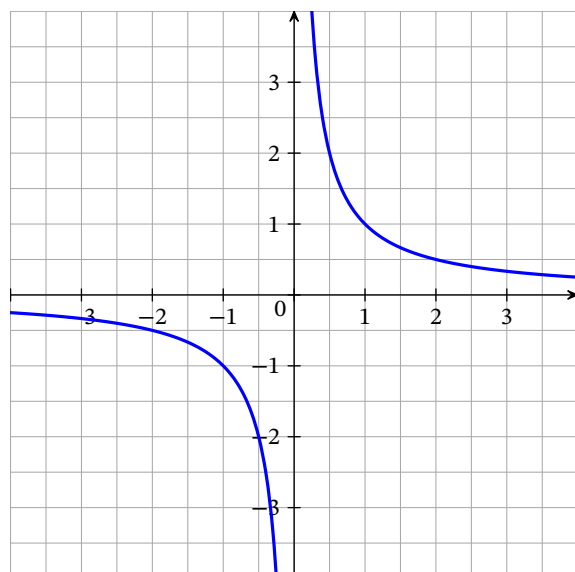
Exemple 2

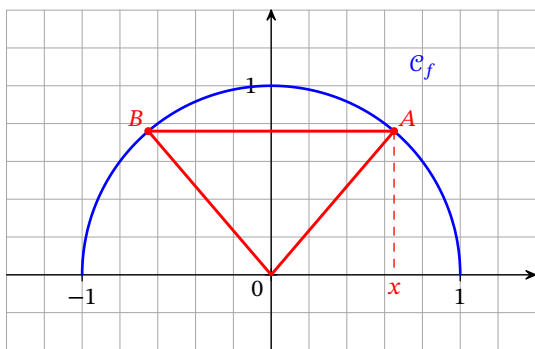
- L'équation $\frac{1}{x} = 3$
- L'équation $\frac{1}{x} = -\frac{1}{2}$

Quelques inéquations, à l'aide du graphique :

L'inéquation $\frac{1}{x} < 2$

L'inéquation $\frac{1}{x} \geq -1$





Le but de l'exercice est de savoir si le triangle OAB peut avoir une aire maximale, sa valeur éventuelle ainsi que la valeur de x pour laquelle elle est atteinte.

- 1) Montrer que l'aire du triangle OAB vaut $x \times f(x)$.
- 2) Justifier que les variations de l'aire du triangle OAB sont les mêmes que celles de cette aire au carré.
- 3) Montrer que pour tout réel x :

$$x^2 - x^4 = \frac{1}{4} - \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2.$$

- 4) Répondre au problème posé.

◆ **FCT.10**

- 1) On considère f telle que pour tout réel x , $f(x) = 2 - 5x^2$.
Démontrer que f est décroissante sur $[0; +\infty[$.
- 2) On considère g telle que pour tout réel x , $g(x) = 1 - (2 - x)^2$.
Démontrer que g est croissante sur $] -\infty; 2]$.

◆ **FCT.11** Soit $f : x \mapsto -2x^2 + 3x + 5$, de \mathbf{R} dans \mathbf{R} .

- 1) Montrer que pour tout réel x :

$$-2x^2 + 3x + 5 = -2 \left[\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{49}{16} \right].$$

- 2) Démontrer que f est croissante sur $] -\infty; \frac{3}{4}]$.
- 3) Démontrer que f est décroissante sur $[\frac{3}{4}; +\infty[$.
- 4) f admet-elle un extremum ?
- 5) Démontrer que la droite d'équation $x = \frac{3}{4}$ est un axe de symétrie pour f .

◆ **FCT.12** Soit $f : x \mapsto 4 + 2x$.

- 1) Donner le domaine de définition maximal de f .
- 2) Montrer que f est strictement croissante sur ce domaine.

◆ **FCT.13** Étudier la parité des fonctions définies par les expressions suivantes :

- 1) $f(x) = -5x^2 + 6$
- 2) $g(x) = 2x^3 - 5x^2$
- 3) $h(x) = \frac{-4x}{x^2 + 1}$

◆ **FCT.14** Montrer que pour tout réel x appartenant à $[\frac{1}{2}; +\infty[$, on a :

$$x \geq \sqrt{2x - 1}.$$

◆ **FCT.15** Ranger les nombres suivants par ordre croissant :

$$(-3)^3; \pi^3; \sqrt{3}^3; (\sqrt{2} - 2)^3; 0.$$

◆ **FCT.16** Vérifier que $(1 + 3\sqrt{5})^3 = 136 + 144\sqrt{5}$.

◆ **FCT.17** Résoudre les (in)équations suivantes :

- | | |
|--------------------------------|--------------------------------------|
| 1) $x^3 = 20$ | 4) $(x - 3)^3 = -4$ |
| 2) $\sqrt{x + 1} - 2 = 9$ | 5) $\frac{2}{x^2 + 1} = \frac{4}{3}$ |
| 3) $\frac{3}{x} = \frac{6}{7}$ | 6) $(x - 4)(2x^3 + 7) = 0$ |

◆ **FCT.18** Quelle est la mesure d'un côté d'un carré dont l'aire est 13 cm^2 ?

Quelle est la mesure de l'arête d'un cube dont le volume est 48 cm^3 ?

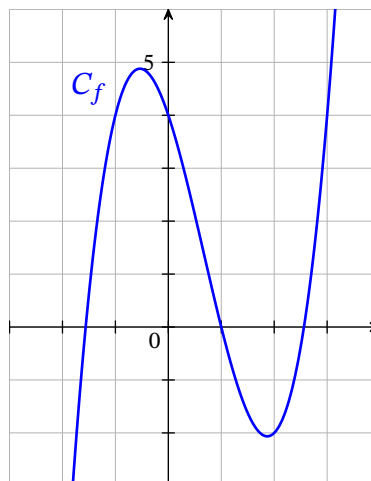
◆ **FCT.19** Soit $f : x \mapsto \sqrt{1 - \frac{1}{x}}$.

- 1) Quel est le domaine de définition maximal de f ?
- 2) Montrer que f est croissante sur $] -\infty; 0[$ et sur $[1; +\infty[$.

◆ **FCT.20** Soit $f : x \mapsto (2 - x)^3$.

- 1) Quel est le domaine de définition maximal de f ?
- 2) Montrer que f est décroissante sur ce domaine.

◆ **FCT.21** Soit f la fonction définie sur \mathbf{R} par $f : x \mapsto x^3 - 2x^2 - 3x + 4$, dont on a tracé la courbe dans le repère ci-dessous :



1) Combien de solution(s) l'équation $f(x) = 0$ semble-t-elle avoir?

2) a) Démontrer que pour tout réel x ,

$$f(x) = (x-1)(x^2 - x - 4).$$

b) Démontrer que pour tout réel x :

$$x^2 - x - 4 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{17}{4}.$$

c) En déduire les solutions de l'équation

$$x^2 - x - 4 = 0.$$

d) En déduire toutes les solutions de l'équation $f(x) = 0$.

◆ **FCT.22 (Position relative de deux courbes)** Soit la fonction f définie sur $] -\infty; 0[$ par $f(x) = \frac{2}{x}$ et la fonction g définie sur \mathbf{R} par $g(x) = x - 1$. On note \mathcal{C} et \mathcal{C}_g leurs courbes représentatives.

1) a) Tracer \mathcal{C} et \mathcal{C}_g dans un même repère.

b) Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \geq g(x)$.

2) Démontrer que pour tout réel x strictement négatif :

a) $f(x) - g(x) = \frac{-x^2 + x + 2}{x}$;

b) $-x^2 + x + 2 = (x+1)(-x+2)$.

3) a) Déterminer le signe de $(x+1)(-x+2)$ en fonction de x .

b) En déduire le signe de $f(x) - g(x)$ en fonction de x sur $] -\infty; 0[$.

c) En déduire les solutions de l'inéquation $f(x) \geq g(x)$ sur $] -\infty; 0[$.

4) Comparer les réponses aux questions 1.b et 3.c.

◆ **FCT.23** Représenter dans un repère orthogonal l'ensemble des points M de coordonnées (x,y) telles que

$$x^2 y^2 = 1.$$

◆ **FCT.24** La vitesse v , exprimée en km.h^{-1} d'un satellite artificiel tournant autour de la Terre à l'altitude h , exprimée en km, est donnée par :

$$v = \frac{356R}{\sqrt{R+h}}$$

où R est le rayon de la Terre ($R = 6370$ km).



1) Si le satellite se déplace à 7573 km.h^{-1} , quelle est son altitude? On arrondira le résultat au kilomètre près.

2) Un satellite géostationnaire se trouve à 35786 km d'altitude.

a) Quelle est sa vitesse? Arrondir au km.h^{-1} .

b) Quelle est sa période de révolution autour de la Terre?

◆ **FCT.25** La pyramide du Louvre a une base carrée. Sa hauteur est 22 m et son volume $89\,083 \text{ m}^3$. Déterminer la mesure d'un côté de la base de cette pyramide.



◆ **FCT.26** Un forgeron souhaite fabriquer une boîte métallique de forme cubique. Pour ce faire, il dispose d'une plaque métallique de $13,5 \text{ m}^2$ qu'il peut fondre à volonté pour lui donner la forme qu'il souhaite.

1) On note x la longueur d'une arête du cube qu'il veut forger. Donner en fonction de x , la surface $S(x)$ du cube.

2) En déduire la longueur de l'arête maximale qu'il peut choisir.

3) Donner un encadrement du volume de la boîte que le forgeron peut créer.

4) Le forgeron peut-il réaliser un cube de volume égal à $\pi \text{ m}^3$? Si oui, pour quelle valeur de x ?

◆ **FCT.27** Un fabricant de glace souhaite créer un cône en gaufrette pour contenir les boules de glace. Les trois contraintes à respecter sont :

- le rayon de la base circulaire doit être inférieur ou égal à 10 cm ;
- la hauteur du cône doit être quatre fois plus grande que le rayon de la base circulaire du cône ;
- le volume du cône doit être égal à 12 cL.

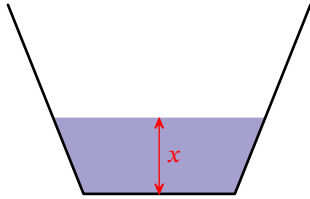
Soit V la fonction qui, à chaque rayon r de la base circulaire du cône, exprimé en cm, associe le volume de ce cône, en cm^3 .

1) a) Sur quel ensemble est définie la fonction V ? Justifier.

- b) Donner l'expression de V , notée $V(r)$.
- 2) Convertir 12 cL en cm^3 et déterminer alors le rayon du cône qui respecte les trois conditions.

◆ **FCT.28** On considère un récipient en forme de cône tronqué de hauteur 60 cm et dont le diamètre de la partie supérieure est 40 cm. Le diamètre de la partie inférieure est de 30 cm.

On verse un liquide dans ce récipient et à la hauteur x du liquide on associe le volume $V(x)$ du liquide contenu dans le récipient.



- 1) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction V puis l'expression $V(x)$.
- 2) Déterminer le pourcentage de remplissage du récipient lorsque le niveau du liquide est à mi-hauteur.