

Chapitre 9 | Arithmétique

César : C'est pourtant pas difficile, regarde. Tu mets un tiers de curaçao. Fais attention, hein, un tout petit tiers ! Un tiers de citron. Tu vois ? Un bon tiers de Picon. Tu vois ? Et alors, un grand tiers d'eau. Voilà.

Marius : Et ça fait quatre tiers.

César : Et alors ?

Marius : Dans un verre, il y a trois tiers.

César : Mais, imbécile, ça dépend de la grosseur des tiers !

Marius : Ben non, ça dépend pas. C'est de l'arithmétique, ça.
Marcel Pagnol, *Marius* (1931).

I Ensembles de nombres

En mathématiques, vous avez découvert des nombres au fur et à mesure : d'abord les entiers naturels (0, 1, 2...), puis les fractions avec des nombres positifs, puis les nombres négatifs, et enfin les nombres réels.

Définition 1 (Ensembles de nombres) —

On note **N** l'ensemble des **entiers naturels** : $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$.

On note **Z** l'ensemble des **entiers relatifs** : $\mathbf{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$.

On note **D** l'ensemble des **nombres décimaux**.

On note **Q** l'ensemble des **nombres rationnels** (qui peuvent s'écrire comme des fractions).

On note **R** l'ensemble des **nombres réels**.

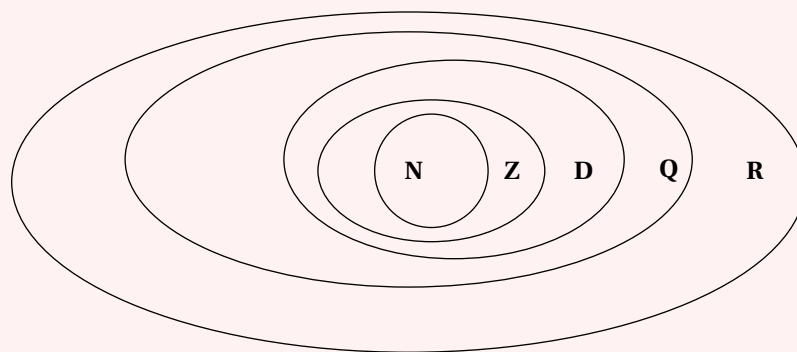
Définition 2 (Nombres décimaux, nombres rationnels) — Soit x un nombre. On dit que x est un **nombre décimal** si et seulement si il existe un entier naturel n tel que $10^n x \in \mathbf{Z}$.

On dit qu'un nombre x est **rationnel** s'il existe deux entiers p et q (où q est non nul) tels que $x = \frac{p}{q}$.

Exemple 1

- $3,4 \in \mathbf{D}$ car
- $-0,168$ est un nombre décimal car
- $-0,168$ est aussi un nombre rationnel car
- $\frac{1}{3}$ est

Théorème 9.1 — On a la chaîne d'inclusion suivante : $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{D} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$, qu'on visualise comme suit :



II Multiples, diviseurs

Définition 3 (Diviseur, multiple) — Soit a et b deux nombres entiers relatifs, tel que b soit non nul. Alors on dit que a est un **multiple** de b si et seulement si il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que

$$a = kb.$$

Dans ce cas, on dit aussi que b est un **diviseur** de a .

Exemple 2

- 4 est un diviseur de 12 car
- 30 est un multiple de -6 car
- 1 divise n'importe quel entier a car
- Tout entier b divise 0 car

Remarque 1 Attention, le mot «divise » ne fait pas référence à une division ; par exemple on ne peut pas diviser par 0 mais on peut dire que 0 divise 0 car $0 = 2 \times 0$.

Remarque 2 On remarque que les diviseurs fonctionnent par paire. En effet, 4 divise 12 car $12 = 3 \times 4$ mais on a donc aussi $12 = 4 \times 3$ ce qui signifie que 3 divise aussi 12. On dit que 3 et 4 forment une paire de diviseurs associés de 12.

Il se peut cependant que deux diviseurs associés d'un entier a soient égaux : par exemple, $36 = 6 \times 6$ donc 6 divise 36 et son diviseur associé est lui-même. Cela signifie en fait que a est le carré d'un entier. C'est ce qu'on appelle un carré parfait.

Définition 4 — De manière plus générale, si x et y sont des réels quelconques (pas nécessairement entiers), on dit que y est un multiple de x s'il existe un entier relatif k tel que $y = k \times x$.

Exemple 3 7 est un multiple de 3,5 car

Attention, 2 ne divise pas 7 pour autant car 3,5 n'est pas un nombre entier ! Ainsi, dans le cas des réels, les diviseurs ne fonctionnent pas forcément par paire.

III Nombres pairs et impairs

Définition 5 (Parité) — Soit n un nombre entier relatif.

- Si n est un multiple de 2 alors on dit que n est **pair**.
- Si $n - 1$ est un multiple de 2 alors on dit que n est **impair**.

Proposition 9.2 — Un nombre entier n est pair si et seulement si il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k$.
Un nombre entier n est impair si et seulement si il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k + 1$.

Exemple 4

- 5 est
- 12 est
- -7 est

Proposition 9.3 — La somme de deux multiples d'un nombre x est un multiple de x .

Exemple 5

$66 + 77$ est un de 11.

Proposition 9.4 — Le carré d'un nombre **impair** est **impair**.

Le carré d'un nombre **pair** est **pair**.

Autrement dit, si n est un entier relatif, n et n^2 ont **même parité**.

☞ **Exemple 6** 15^2 est un nombre

IV Nombres premiers

Définition 6 (Nombres premiers) — Un entier naturel p est un nombre premier si p admet exactement deux diviseurs positifs : 1 et lui-même.

☞ **Exemple 7** Les nombres premiers inférieurs ou égaux à 20 sont

Remarque 3 0 n'est pas premier car il admet une infinité de diviseurs positifs (on a vu que tout entier divise 0) et 1 n'est pas premier car 1 possède un seul diviseur positif : lui-même.

Ainsi, le plus petit nombre premier est 2. C'est par ailleurs le seul nombre premier pair. En effet, si n est un entier pair strictement supérieur à 2 alors n possède au moins 3 diviseurs : 1, 2 et n .

Théorème 9.5 (admis) — *Tout entier naturel $n \geq 2$ est soit un nombre premier soit un produit de nombres premiers. De plus, si n n'est pas premier, il existe une seule façon d'écrire n comme un produit de nombres premiers. Cette écriture est appelée la décomposition de n en produit de facteurs premiers.*

☞ **Exemple 8** Quelques décompositions en produits de facteurs premiers :

- $6 =$
- $100 =$
- $77 =$

V Forme irréductible d'un nombre rationnel

Définition 7 (Diviseur commun) — Soient a , b et d des entiers. On dit que d est un diviseur commun à a et b si d divise a et d divise b .

Définition 8 (Forme irréductible) — Soit a un entier relatif et b un entier naturel non nul. On dit que la fraction $\frac{a}{b}$ est **irréductible** si a et b n'ont pas d'autre diviseur commun positif que 1.

☞ **Exemple 9** $\frac{5}{7}$ est irréductible mais pas $\frac{14}{77}$.

Théorème 9.6 (admise) — *Tout nombre rationnel admet une forme irréductible unique.*

☞ **Exemple 10**

- $\frac{10}{4} =$
- $\frac{-8}{6} =$
- $\frac{11}{-121} =$
- $\frac{-16}{-10} =$

Théorème 9.7 — $\sqrt{2}$ est un nombre **irrationnel** : $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.