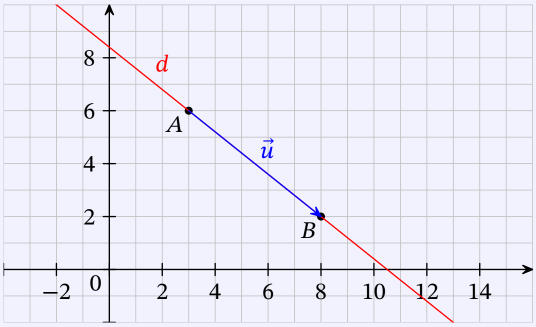
Chapitre 10 | Droites du plan

I Équations cartésiennes de droite

10.1.1 Vecteur directeur d'une droite

Définition 1 (Vecteur directeur d'une droite) —

Soit d une droite. Un **vecteur directeur** de d est un vecteur non nul formé par deux points de la droite.



Proposition 10.1 —

- *Tous les vecteurs directeurs d'une droite donnée sont colinéaires deux à deux.*
- *Deux droites d et d' sont parallèles si et seulement si un vecteur directeur de d est colinéaire à un vecteur directeur de d'.*

10.1.2 Équation cartésienne de droite

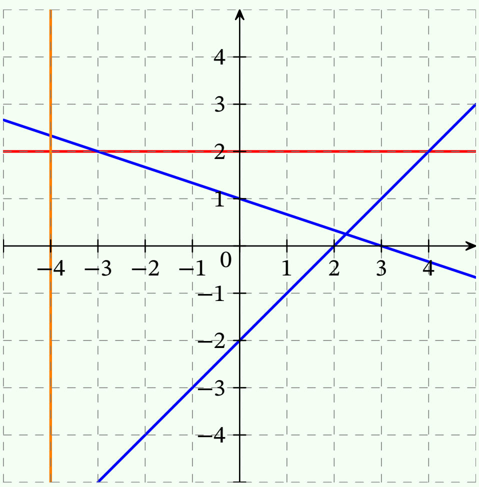
Théorème 10.2 (Équation cartésienne d'une droite) — *Soit a, b et c trois réels tels que $(a,b) \neq (0,0)$.*
Alors toute droite d du plan admet une équation du type

$$ax + by + c = 0.$$

Réciproquement, toute équation du type $ax + by + c = 0$ est l'équation d'une droite du plan.
On dit que $ax + by + c = 0$ est une ***équation cartésienne*** *de la droite d associée.*

Proposition 10.3 (Vecteur directeur et équation cartésienne) — *$ax + by + c = 0$ est une équation cartésienne d'une droite (d) si et seulement si $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d).*

☞ **Exemple 1**



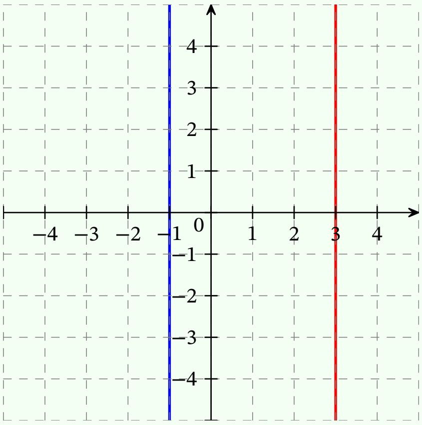
II Équations réduites de droites

10.2.1 Droite parallèle à l'axe des ordonnées

Proposition 10.4 (Équation réduite du type $x = k$) — *Si d est une droite parallèle à l'axe des ordonnées, alors son équation cartésienne peut être réécrite sous la forme : $x = k$ où $k \in \mathbf{R}$.*

*Dans ce cas, cette équation est **l'équation réduite** de d et un **vecteur directeur** de d est $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.*

Exemple 2



10.2.2 Autres droites

Proposition 10.5 (Équation réduite du type $y = mx + p$) — *Si d est une droite non parallèle à l'axe des ordonnées, alors son équation cartésienne peut être réécrite sous la forme :*

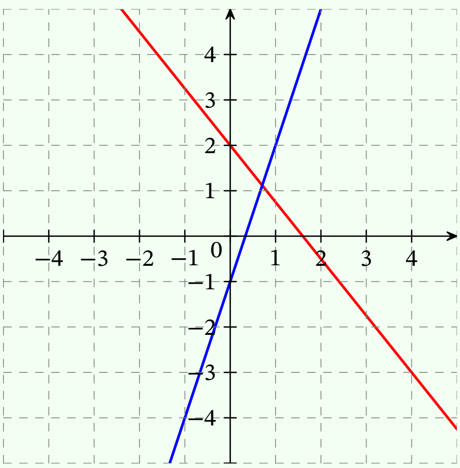
$$y = mx + p$$

où $m, p \in \mathbf{R}$. Dans ce cas :

- *cette équation est **l'équation réduite** de d ;*
- *un **vecteur directeur** de d est $\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$,*
- *m est appelé le **coefficient directeur** ou la **pente** de (d),*
- *p est son **ordonnée à l'origine**.*

Proposition 10.6 — *Deux droites d et d′ de pentes respectives m et m′ sont parallèles si et seulement si $m = m'$.*

Exemple 3



III Systèmes d'équations

10.3.1 Définition, exemple

Définition 2 (Système 2x2) — Un système affine de deux équations à deux inconnues x et y se note :

$$\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$$

où a, a', b, b', c et c' sont des réels fixés.
Résoudre ce système, c'est trouver tous les couples de réels (x,y) qui vérifient simultanément les deux égalités, qui sont alors les **solutions** de ce système.

☞ **Exemple 4** Résoudre le système $\begin{cases} 5x+y-2=0 \\ y-x+2=0 \end{cases}$

10.3.2 Interprétation géométrique

Proposition 10.7 — *Si $ax+by+c=0$ et $a'x+b'y+c'=0$ sont des équations cartésiennes respectives de deux droites d et d', alors les solutions du système :*

$$\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$$

sont les coordonnées du (des) ***point(s) d'intersection*** *de d et d'.*

☞ **Exemple 5** On reprend l'exemple précédent :

$$\begin{cases} 5x+y-2=0 \\ y-x+2=0 \end{cases}$$

La solution $\left(\frac{2}{3};-\frac{4}{3}\right)$ donne les coordonnées du point d'intersection des deux droites d'équation $5x+y-2=0$ et $y-x+2=0$: