

Il arrive fréquemment que l'on doive prouver l'égalité de deux nombres ou de deux expressions algébriques. Voici différentes méthodes qui permettent d'y arriver.

Attention : l'égalité de valeurs approchées données à la calculatrice **n'est pas** une preuve de l'égalité des deux nombres, car ces valeurs approchées sont souvent tronquées.

1 Transformer un des deux nombres pour obtenir l'autre

◆ **TD 5.1** Démontrer que l'on a :

$$1 + 3\sqrt{3} = (2\sqrt{3} - 1)(2 + \sqrt{3}) - 3.$$

☞ **Indications exercice 1** : Partir du nombre du second membre, car c'est le plus compliqué. Le simplifier afin d'obtenir le nombre du premier membre.

◆ **TD 5.2** Démontrer que pour tout réel $t \neq 0$:

$$\frac{2(t-1)}{t^2} - \frac{t+3}{t} = \frac{-t^2 - t - 2}{t^2}.$$

☞ **Indications exercice 2** : Écrire les deux termes du membre de gauche au même dénominateur.

2 Montrer que les deux nombres sont égaux à un même troisième

◆ **TD 5.3** Démontrer que :

$$(\sqrt{2} - 1)(10\sqrt{2} + 14) = (\sqrt{2} + 2)^2.$$

☞ **Indications exercice 3** : Transformer chacun des deux membres et constater qu'ils sont égaux au même nombre réel.

◆ **TD 5.4** Démontrer que pour tout réel x distinct de -2 et -3 :

$$\frac{x-1}{2x+6} + \frac{1}{x+2} = \frac{-2}{x+3} + \frac{x+4}{2x+4}.$$

3 Montrer que les carrés de deux nombres positifs sont égaux

Cette méthode est souvent utilisée lorsqu'on a des racines carrées d'expressions. On peut appliquer le résultat suivant :

Si A et B sont positifs, alors : $[A^2 = B^2 \text{ entraîne } A = B]$.

◆ **TD 5.5** Montrer que : $5 + 4\sqrt{2} = \sqrt{57 + 40\sqrt{2}}$.

☞ **Indications exercice 5** : Vérifier que les deux membres de l'égalité sont positifs et calculer leurs carrés.

4 Calculer la différence des deux nombres

On peut utiliser le résultat suivant :

$$A - B = 0 \text{ si et seulement si } A = B.$$

◆ **TD 5.6** Démontrer que : $\frac{2}{\sqrt{3}-1} = \sqrt{3} + 1$.

☞ **Indications exercice 6** : Vérifier que la différence de ces deux nombres est égale à 0.

5 Applications

◆ **TD 5.7** Choisir la meilleure méthode pour démontrer les égalités suivantes :

1) $2 - \frac{1}{5} = \left(\sqrt{2} - \frac{\sqrt{5}}{5}\right)\left(\sqrt{2} + \frac{\sqrt{5}}{5}\right);$

2) Pour tous réels a et b , $(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab;$

3) Pour tout $y \neq 2$, $\frac{y(1-y)}{2-y} = y + 1 - \frac{2}{2-y};$

4) $5\sqrt{2} - 3 = \sqrt{59 - 30\sqrt{2}};$

5) $\frac{8}{\sqrt{5}-1} = 2(\sqrt{5} + 1);$

6) Pour tout $x \neq 1$, $\frac{1-x^5}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4;$

7) $\sqrt{125} - \sqrt{20} = \frac{3}{5}\sqrt{125}.$