

Suites, récurrence et limites

Lorsque les valeurs successivement attribuées à une même variable s'approchent indéfiniment d'une valeur finie, de manière à en différer aussi peu qu'on voudra, cette dernière est appelée limite de toutes les autres.

Augustin-Louis Cauchy (1789-1857).

I Rappels

1.1.1 Définition générale

Définition 1 (Suite) — Une suite numérique u est une fonction de $\mathbf{N}$ (quelques fois de $\mathbf{N}^*$) dans $\mathbf{R}$, c'est-à-dire une application qui à tout entier naturel n associe un nombre réel $u(n)$, noté généralement u_n .

$$\text{Ainsi } u : \begin{cases} \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R} \\ n \mapsto u_n \end{cases}$$

L'ensemble des suites de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{R}$ est noté $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$.

II Raisonement par récurrence

Suivant la façon de construire l'ensemble des entiers naturels $\mathbf{N}$, le résultat suivant peut être vu comme un axiome ; il existe différentes manières de formuler le **principe de récurrence**. Je fais le choix de le présenter comme une conséquence d'autres axiomes.

Théorème 1.1 (Formulation du principe de récurrence, admis) — Soit $P(n)$ une propriété dépendant de l'entier naturel n . On suppose qu'on a les deux assertions suivantes :

- $P(0)$ est vraie, (**initialisation**)
- pour tout $k \in \mathbf{N}$, $P(k)$ implique $P(k+1)$, (**hérédité**).

Alors $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n .

Exemple 1 Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$1 + 2 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1.$$

Exemple 2 Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $4^n + 5$ est un multiple de 3.

Exemple 3 Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n non nul :

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

Exemple 4 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 5$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1.$$

- 1) Démontrer par récurrence que :
 - a) (u_n) est positive ;
 - b) (u_n) est décroissante.
- 2) Y a-t-il un moyen de rédiger une seule récurrence pour montrer ces deux points ?

III Convergence, divergence

1.3.1 Vocabulaire

Définition 2 (Croissance, minoration, majoration) —

- On dit qu'une suite (u_n) est **croissante** (resp. strictement croissante) si pour tout entier n :

$$u_n \leq u_{n+1} \quad (\text{resp. } u_n < u_{n+1})$$

- On dit qu'une suite (u_n) est **décroissante** (resp. strictement décroissante) si pour tout entier n :

$$u_n \geq u_{n+1} \quad (\text{resp. } u_n > u_{n+1})$$

- On dit que u_n est **majorée** par un réel M si pour tout entier n :

$$u_n \leq M$$

- On dit que u_n est **minorée** par un réel m si pour tout entier n :

$$m \leq u_n$$

- On dit que u_n est **bornée** s'il existe un réel M tel que pour tout entier n :

$$|u_n| \leq M$$

Remarque 1 Si (u_n) est une suite majorée par M , alors tout réel supérieur à M majore aussi (u_n) ; par exemple si pour tout entier n , $u_n \leq 1$, alors on a aussi $u_n \leq 2$.

De même, si (u_n) est inférieure à m , tout minorant inférieur à m minore aussi (u_n) .

1.3.2 Convergence dans $\mathbb{R}$

Définition 3 (Convergence d'une suite) — On dit qu'une suite (u_n) **converge vers un réel ℓ** (sous-entendu lorsque n tend vers $+\infty$), si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang. Les formulations suivantes sont par définition équivalentes :

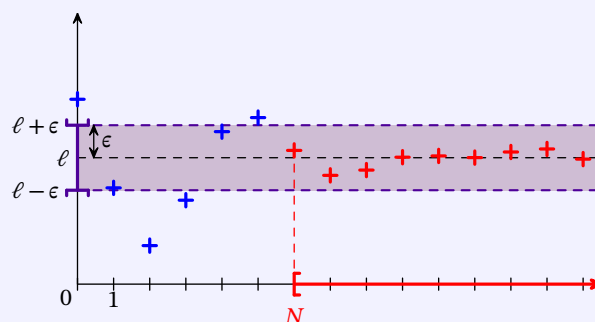
- (u_n) converge vers ℓ ;
- (u_n) admet ℓ comme limite ;
- (u_n) tend vers ℓ .

Définition 4 (Définition formelle de la convergence) —

On dit que (u_n) **converge vers un réel ℓ** si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \quad n \geq N \Rightarrow |u_n - \ell| < \epsilon.$$

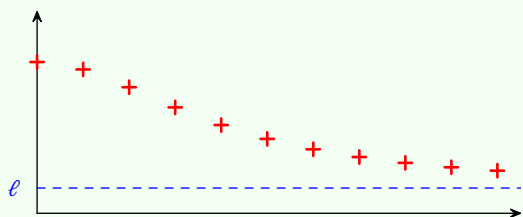
On note dans ce cas $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$.



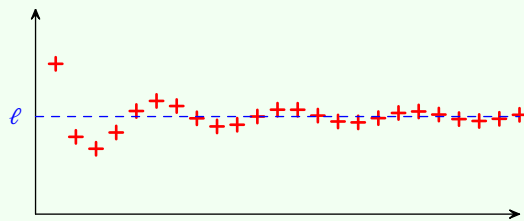
Remarque 2 on ne peut rien déduire d'une représentation graphique ! Seuls les vérifications à partir de la définition et les propriétés et théorèmes permettent de déduire qu'une suite converge.

Exemple 5 (Exemples de suites convergentes)

$$u_n = 1 + \frac{5}{(n/4)^2 + 1}$$



$$u_n = 1 + \frac{\cos n}{n}$$



Proposition 1.2 (Unicité de la limite) — Si (u_n) est une suite convergente, sa limite ℓ est **unique**.

Proposition 1.3 (Exemple fondamental) — La suite de terme général $u_n = \frac{1}{n}$ converge vers 0.

Théorème 1.4 (Fondamental, convergence monotone, admis) — Toute suite réelle décroissante et minorée converge. De même, toute suite croissante et majorée converge.

Remarque 3 Attention, $u_n = \frac{1}{n}$ est décroissante et minorée par -1 , mais converge vers 0. Avoir un minorant ne garantit pas que ce même minorant soit la limite de la suite !

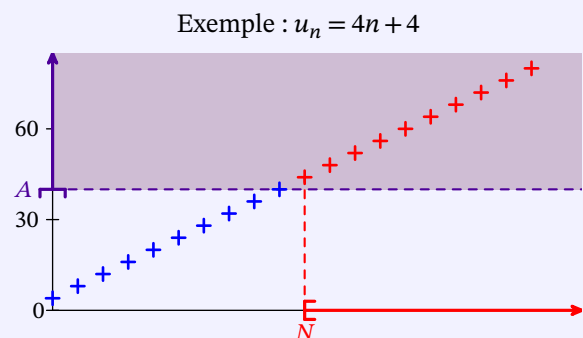
1.3.3 Divergences vers l'infini

Définition 5 (Divergence) — Une suite (u_n) non convergente est dite **divergente**.

Définition 6 (Divergences vers $+\infty$) —

On dit qu'une suite (u_n) tend vers $+\infty$ (ou **diverge vers $+\infty$**) si tout intervalle de la forme $]A; +\infty[$ contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang, autrement dit si :

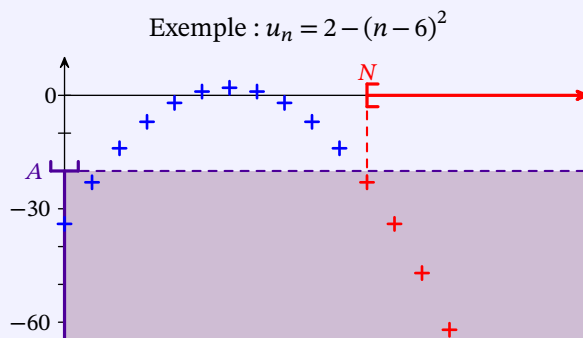
$$\forall A \in \mathbf{R}, \quad \exists N \in \mathbf{N}, \quad n \geq N \Rightarrow u_n > A.$$



Définition 7 (Divergence vers $-\infty$) —

De même, on dit qu'une suite (u_n) tend vers $-\infty$ (ou **diverge vers $-\infty$**) si tout intervalle de la forme $] -\infty; A[$ contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang, autrement dit si :

$$\forall A \in \mathbf{R}, \quad \exists N \in \mathbf{N}, \quad n \geq N \Rightarrow u_n < A.$$



Proposition 1.5 (Exemple fondamental) — Soit a et b deux réels. Si pour tout entier naturel n , $u_n = an + b$, alors :

- Si $a > 0$, (u_n) tend vers $+\infty$;
- Si $a < 0$, (u_n) tend vers $-\infty$;
- Si $a = 0$, (u_n) tend vers b .

Théorème 1.6 (Un critère de divergence vers l'infini) — Toute suite croissante non majorée tend vers $+\infty$. De même, toute suite décroissante non minorée tend vers $-\infty$.

IV Limites usuelles admises pour l'instant

Proposition 1.7 (Limites usuelles) — Si k est un entier strictement positif :

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^k = +\infty$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = +\infty$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^k} = 0$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 0$

Théorème 1.8 (Limite de q^n) — Soit $q \in \mathbf{R}$. Alors :

- Si $q > 1$, (q^n) tend vers $+\infty$;
- Si $q = 1$, (q^n) tend vers 1;
- Si $-1 < q < 1$, (q^n) tend vers 0;
- Si $q \leq -1$, (q^n) n'admet pas de limite.

V Opérations sur les limites

Dans les tableaux des **produits** et **quotients**, lorsque « ∞ » est mentionné, la règle des signes s'applique au résultat.

1.5.1 Somme de suites

Proposition 1.9 (Admis) —

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n + w_n$						

1.5.2 Produit de suites

Proposition 1.10 (Admis) —

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	ℓ	$\ell \neq 0$	∞	0
$\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n$	ℓ'	∞	∞	∞
$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \times w_n$				

1.5.3 Quotient de suites

Proposition 1.11 (Admis) —

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	ℓ	$\ell \neq 0$	∞	$\ell \neq 0$ ou ∞	0	∞
$\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n$	$\ell' \neq 0$	∞	$\ell' \neq 0$	0 et w_n de signe constant	0	∞
$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{w_n}$						

VI Comparaison de limites

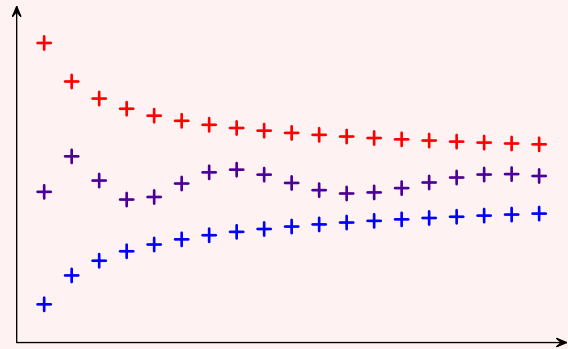
1.6.1 Cas de convergence

Théorème 1.12 (Théorème des gendarmes) —

Si (u_n) , (v_n) , (w_n) sont trois suites telles que :

- À partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n \leq w_n$;
- (u_n) et (w_n) convergent vers ℓ .

Alors (v_n) converge, et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell$.



Proposition 1.13 (Ordre des limites) — Si (u_n) et (v_n) sont deux suites tels qu'à partir d'un certain rang, on a $u_n \leq v_n$, et que (u_n) converge vers ℓ et (v_n) converge vers ℓ' , alors $\ell \leq \ell'$.

En particulier, si pour tout n , $u_n \leq M$ et que (u_n) converge vers ℓ , alors $\ell \leq M$.

Proposition 1.14 (Ordre des limites, cas d'inégalité stricte) — Si (u_n) et (w_n) sont deux suites tels qu'à partir d'un certain rang, on a $u_n < v_n$, et que (u_n) converge vers ℓ et (v_n) converge vers ℓ' , alors $\ell < \ell'$.

Proposition 1.15 (Cas d'une suite monotone convergente) — Si (u_n) est une suite croissante et convergente vers ℓ , alors pour tout entier n on a $u_n \leq \ell$.

De même, si (u_n) est une suite décroissante et convergente vers ℓ , alors pour tout entier n on a $u_n \geq \ell$.

1.6.2 Cas de divergence

Théorème 1.16 — Si (u_n) et (v_n) sont deux suites telles qu'à partir d'un certain rang, $u_n \leq w_n$, alors :

- Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = +\infty$;
- Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = -\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

Proposition 1.17 (Limites usuelles) — Si k est un entier strictement positif :

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^k = +\infty$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = +\infty$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^k} = 0$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 0$

Théorème 1.18 (Limite de q^n) — Soit $q \in \mathbb{R}$. Alors :

- Si $q > 1$, (q^n) tend vers $+\infty$;
- Si $-1 < q < 1$, (q^n) tend vers 0;
- Si $q = 1$, (q^n) tend vers 1;
- Si $q \leq -1$, (q^n) n'admet pas de limite.

VII Compléments

1.7.1 Suites adjacentes

Théorème 1.19 (Suites adjacentes) —

Si (u_n) et (w_n) sont deux suites telles que :

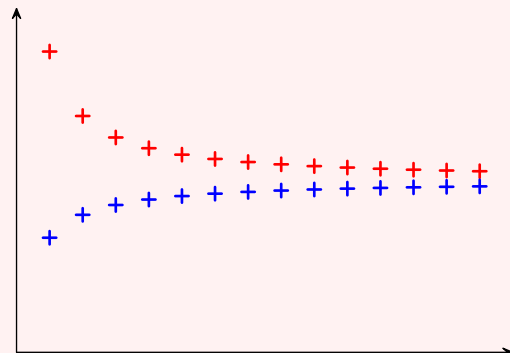
- pour tout entier n , $u_n \leq w_n$;
- (u_n) est croissante, et (w_n) est décroissante;
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n - u_n = 0$.

Alors on dit que (u_n) et (w_n) sont **adjacentes**.

De plus, on a alors :

- (u_n) et (w_n) convergent;
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n$.

Illustration :



Exemple 6 Démontrer que les suites de terme général $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n!}$ et $w_n = u_n + \frac{1}{n \times n!}$ sont convergentes et convergent vers la même limite.

1.7.2 Méthode de Héron

La méthode de Héron permet de calculer des valeurs approchées de racines carrées.

Si $a \in \mathbf{R}$ est le réel strictement plus grand que 1 dont on veut calculer une valeur approchée de la racine carrée, on considère la suite (x_n) :

$$\begin{cases} x_0 = \lfloor \sqrt{a} \rfloor \\ x_{n+1} = \frac{x_n + \frac{a}{x_n}}{2} \end{cases} \quad (\text{pour tout entier naturel } n).$$

Théorème 1.20 (Convergence de la méthode de Héron) — La suite (x_n) converge vers $\sqrt{a}$ et cette convergence est quadratique, c'est-à-dire que pour tout entier n :

$$|x_{n+1} - \sqrt{a}| \leq \frac{1}{2\sqrt{a}} |x_n - \sqrt{a}|^2.$$

VIII Exercices

Suites arithmétiques

♦ **SN.1** Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $r = 3$.

- 1) Calculer u_1 , u_2 et u_3 .
- 2) Déterminer, pour tout $n \in \mathbf{N}$, l'expression de u_n en fonction de n .
- 3) Calculer $\sum_{k=0}^{10} u_k = u_0 + u_1 + \dots + u_{10}$.

♦ **SN.2** Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ la suite arithmétique telle que $u_5 = 3$ et $u_{20} = 33$.

- 1) Calculer la raison de (u_n) .

- 2) Calculer le premier terme u_0 .
- 3) Déterminer, pour tout $n \in \mathbf{N}$, l'expression de u_n en fonction de n .
- 4) Calculer $\sum_{k=5}^{20} u_k = u_5 + u_6 + \dots + u_{20}$.

Suites géométriques

♦ **SN.3** Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison $q = 2$.

- 1) Calculer u_1 , u_2 et u_3 .
- 2) Déterminer, pour tout $n \in \mathbf{N}$, l'expression de u_n en fonction de n .

3) Calculer $\sum_{k=0}^{10} u_k = u_0 + u_1 + \dots + u_{10}$.

♦ **SN.4** Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite géométrique telle que $u_5 = 1$ et $u_7 = 9$.

- 1) Quelles sont les valeurs possibles pour la raison q de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$?
- 2) On suppose dorénavant que $q > 0$. Calculer u_1 .
- 3) Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de u_n en fonction de n .
- 4) Calculer $\sum_{k=1}^5 u_k = u_1 + u_2 + \dots + u_5$.

Révisions - suites de référence

Dans la lignée des premiers exercices de révision, plusieurs exercices pour être au point sur les suites arithmétiques et géométriques.

♦ **SN.5** Pour chacune des suites définies sur $\mathbb{N}$ ci-dessous, dire si elle est arithmétique, géométrique ou ni l'un ni l'autre. On précisera, la cas échéant, la raison et le premier terme.

- 1) $u_n = n^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- 2) $u_n = \frac{n^2 + 3n + 2}{n + 2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- 3) $u_n = 7 \times 2^{2n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- 4) $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 5u_n + 5 \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- 5) $u_n = \frac{6^{n+2}}{5^{n-1}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

♦ **SN.6** On donne deux termes d'une suite arithmétique. Donner le terme général u_n et calculer u_4 .

- 1) $u_5 = 4, u_{10} = 49$;
- 2) $u_6 = 17, u_{10} = 15$;
- 3) $u_{10} = 90, u_{100} = 99$.

♦ **SN.7** On donne deux termes d'une suite géométrique de raison positive. Donner le terme général de u_n et calculer u_4 .

- 1) $u_1 = -4, u_2 = -28$;
- 2) $u_5 = \frac{1}{3}, u_7 = \frac{1}{27}$;
- 3) $u_{10} = 8, u_8 = 2$.

♦ **SN.8** On considère une suite géométrique (u_n) de premier terme $u_1 = 1$ et de raison $q = -2$. Calculer la somme $S = u_1 + u_2 + \dots + u_{20}$.

♦ **SN.9** Une suite (u_n) est géométrique de raison $q \geq 0$. On sait que $u_4 = 10$ et $u_6 = 20$. Calculer la somme

$$S = u_{50} + u_{51} + \dots + u_{100}.$$

♦ **SN.10** Calculer les sommes suivantes :

- $S_1 = 1 + 2 + 3 + \dots + 998 + 999$;
- $S_2 = 2006 + 2007 + \dots + 9999$;
- $S_3 = 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 999$;
- $S_4 = 1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32 + \dots + 4096$;
- $S_5 = 1 + 3 + 9 + 27 + \dots + 59049$;
- $S_6 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{28}}$;
- $S_7 = 2 + 4 + 8 + 16 + \dots + 4096$;
- $S_8 = -3 + 9 - 27 + 81 - \dots + 6561 - 19683$.

Représentation de suites récurrentes

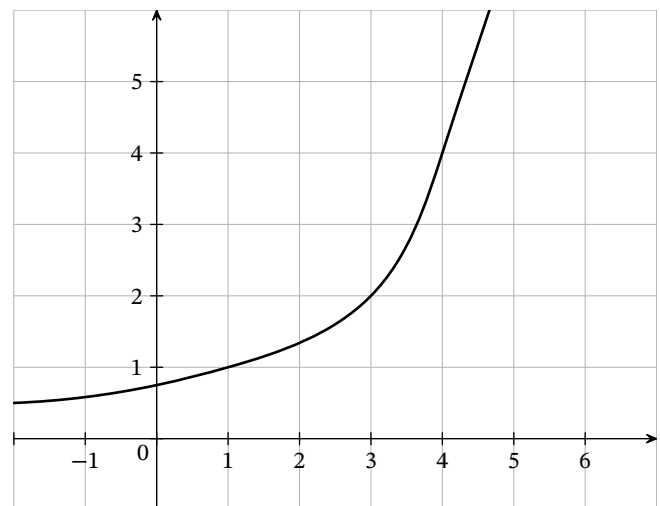
Comme vu en première, on peut représenter graphiquement les termes d'une suite définies par une relation de récurrence du type $u_{n+1} = f(u_n)$, voici deux exercices sur ce point.

♦ **SN.11** Soit v la suite définie par :

$$\begin{cases} v_0 = a \\ v_{n+1} = g(v_n) \end{cases} \quad \text{Pour tout } n \in \mathbb{N}$$

où g est la fonction dont la représentation graphique est donnée ci-dessous.

- 1) Placer les 4 premiers termes de la suite sur l'axe des abscisses pour $a = 3,5$.
- 2) Conjecturer le sens de variation de la suite v selon les valeurs de a .



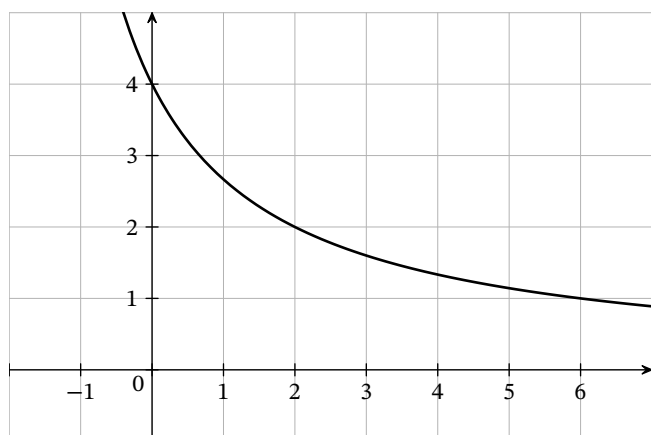
♦ **SN.12** Soit w la suite définie par :

$$\begin{cases} w_0 = 0 \\ w_{n+1} = h(w_n) \end{cases} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N},$$

où h est la fonction définie par :

$$h(x) = \frac{8}{x+2}.$$

On donne ci-dessous une partie de la représentation graphique de h :



- 1) Placer les 5 premiers termes de la suite sur l'axe des abscisses.
- 2) Que peut-on conjecturer sur les variations de w ?
- 3) Que se passe-t-il si $w_0 = -6$?

Sens de variation

Deux mini-exercices pour se remémorer les résultats sur les suites de référence.

♦ **SN.13** Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite arithmétique de raison 4. Quelles sont les variations de (u_n) ?

♦ **SN.14** Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

- 1) Peut-on donner les variations de (u_n) avec seulement cette information?
- 2) Si on suppose que $u_0 = -3$, quelles sont les variations de (u_n) ?

Un premier exercice avec la méthode $u_{n+1} - u_n$.

♦ **SN.15** Soit u la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = u_n + n^2 - n + 1 \end{cases} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

- 1) Pour tout entier n , exprimer $u_{n+1} - u_n$.
- 2) Quel est le signe de l'expression précédente?
- 3) Que peut-on en déduire pour le sens variation de la suite u ?

Un second exercice avec la méthode $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

♦ **SN.16** Soit v la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$v_n = \frac{5}{8^n}.$$

- 1) Justifier que tous les termes de v_n sont strictement positifs.
- 2) Calculer, pour tout entier n , $\frac{v_{n+1}}{v_n}$.

3) Comparer le quotient précédent à 1.

4) Que peut-on en déduire pour le sens de variation de la suite v ?

♦ **SN.17** On considère la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par

$$u_n = n^2 - 8n + 17.$$

On propose deux façons de faire pour étudier les variations de (u_n) .

Première méthode.

- 1) Calculer $u_{n+1} - u_n$.
- 2) En étudiant le signe de l'expression obtenue, en déduire que (u_n) est croissante à partir du rang $n = 4$.

Seconde méthode.

- 1) Étudier les variations de la fonction

$$f : x \mapsto x^2 - 8x + 17,$$

soit en utilisant le cours sur les fonctions du second degré, soit en dérivant la fonction f .

- 2) En déduire que (u_n) est croissante à partir du rang $n = 4$.

♦ **SN.18** On considère la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par

$$u_n = \frac{1}{n^2 + 1}.$$

Déterminer son sens de variation.

Python

♦ **SN.19** On considère la suite (u_n) telle que :

$$\begin{cases} u_0 = 8 \\ u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{1}{3^n} \end{cases} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

- 1) Calculer u_1 et u_2 .
- 2) On souhaite écrire une fonction **terme** en Python qui renvoie la valeur de u_n avec n comme argument. On considère la fonction suivante :

```
1 def terme(n):
2     u=8
3     for i in range(1,n):
4         u=1/5*u+1/(3**i)
5     return(u)
```

- a) Que renvoie **terme**(2)?
- b) Expliquer pourquoi cette fonction ne convient pas et proposer une modification pour obtenir la fonction voulue.

♦ **SN.20** On considère la suite (u_n) telle que :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n - n + 1 \end{cases} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Compléter la fonction **somme** ci-dessous de telle sorte qu'elle renvoie la somme des n premiers termes de la suite (u_n) lorsqu'on l'exécute en prenant n comme argument.

```
1 def somme(n):
2     u = ...
3     s = ...
4     k = ...
5     while ... :
6         u = ...
7         s = ...
8         k = ...
9     return(s)
```

♦ **SN.21** On considère la suite (v_n) définie par :

$$\begin{cases} v_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{9}{6-v_n} \end{cases} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Écrire une fonction **termev** en Python qui renvoie la valeur de v_n lorsqu'on l'exécute avec n en argument.

Récurrence

♦ **SN.22** Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$1 + 3 + \dots + 3^n = \frac{3^{n+1} - 1}{2}.$$

N'a-t-on pas une autre façon de démontrer le résultat précédent ?

♦ **SN.23** Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n ,

$7^n - 1$ est un multiple de 6.

♦ **SN.24** Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 5$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = 2u_n - 4.$$

1) Démontrer par récurrence que :

- a) (u_n) est minorée par 5 ;
- b) (u_n) est croissante.

2) Y a-t-il un moyen de rédiger une seule récurrence pour montrer ces deux points ?

♦ **SN.25** Soit (v_n) la suite définie par $v_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+1} = \frac{v_n}{1 + v_n}.$$

- 1) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n > 0$.
- 2) On définit la suite (u_n) pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$u_n = \frac{1}{v_n}.$$

- a) Démontrer que (u_n) est une suite arithmétique.
- b) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de u_n puis celle de v_n en fonction de n .

♦ **SN.26** Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = 2u_n - 3.$$

Les deux questions de cet exercice permettent d'obtenir l'expression de u_n en fonction de n , par deux méthodes différentes.

1) Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = 3 - 2^n.$$

2) On définit la suite (v_n) pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = u_n - 3$.

- a) Démontrer que (v_n) est une suite géométrique et déterminer sa raison.
- b) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de v_n puis celle de u_n en fonction de n puis retrouver le résultat de la question 1.

♦ **SN.27** Si n est un entier naturel non nul, on pose

$$S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \sum_{k=1}^n k^2.$$

- 1) Calculer S_1 , S_2 , S_3 et S_4 .
- 2) Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, S_{n+1} en fonction de S_n .
- 3) Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 1$,

$$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

♦ **SN.28** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note S_n la somme des n premiers entiers naturels impairs :

$$S_n = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = \sum_{k=1}^n (2k-1).$$

- 1) a) Calculer S_1 , S_2 , S_3 et S_4 . Quelle conjecture peut-on faire ?
b) Démontrer la conjecture précédente par récurrence.
- 2) En utilisant une suite arithmétique, retrouver directement le résultat de la question b).
- 3) Comment peut-on visualiser la propriété démontrée ?

♦ **SN.29** Soit $a \in]0,1[$. On considère la suite définie par $u_0 = a$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n(1 - u_n)$.

Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 < u_n < 1.$$

♦ **SN.30** Soit $a \in]0,1[$. On considère la suite définie par $u_0 = a$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n(2 - u_n)$.

Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 < u_n < 1.$$

♦ **SN.31 (Sommes remarquables)**

- 1) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n non nul :

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

- 2) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n non nul :

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

- 3) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n non nul :

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2.$$

Études et limites

Dans cette partie, on va par ordre croissant de difficulté.

♦ **SN.32** Donner la limite (si elle existe!) de chaque suite :

- | | |
|--------------------------------|--------------------------------|
| 1) $u_n = 2 + \frac{1}{n}$; | 5) $u_n = 2 \times 3^n$; |
| 2) $u_n = \frac{1}{1+n+n^2}$; | 6) $u_n = \frac{-5}{4^n}$; |
| 3) $u_n = 5n - 5$; | 7) $u_n = n^2 + \frac{1}{n}$; |
| 4) $u_n = 8 - n$; | 8) $u_n = n^3 - n^2$. |

☞ **Indications exercice 32 :** pour le numéro 8), on factorisera par n^3 .

♦ **SN.33** Donner la limite (si elle existe!) de chaque suite :

1) $u_n = \frac{2n+5}{n+1}$;

2) $u_n = \sqrt{n+1}$.

3) $u_n = \frac{\frac{5}{n} + 7}{8 + \frac{2}{n}}$;

4) $u_n = -7n^3 + 5n + 3$;

5) $u_n = \frac{2}{n^2 - 4}$.

6) $u_n = \frac{\left(\frac{5}{7}\right)^n}{\frac{1}{n^2} - 9}$.

7) $u_n = \frac{5n^2 + n}{n^2 + 4n}$;

8) $u_n = 5 \times \left(\frac{185}{192}\right)^n$;

9) $u_n = \frac{\left(\frac{7}{5}\right)^n}{\left(\frac{4}{3}\right)^n}$;

♦ **SN.34** Déterminer les limites des suites de terme général suivants :

• $a_n = \frac{\sqrt{n} + \cos(n)}{n^2 + n + 1}$;

• $b_n = n^5 + \sqrt{\frac{n+1}{1+n^2}} - 10$;

• $c_n = \frac{3n^2 + 5}{2n}$;

• $d_n = \frac{1 - w_n}{2 - w_n}$ où la suite (w_n) vérifie :

• $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 2$; • $\forall n \in \mathbb{N}, w_n > 2$.

♦ **SN.35** Déterminer les limites des suites de terme général suivants :

• $a_n = \frac{\sin(n^2 + n) - 5\sqrt{n}}{2\sqrt{n} + 2}$;

• $b_n = n^3 - \sqrt{\frac{n^2 + 1}{n + n^3}} - 5$;

• $c_n = \frac{3n^3 + 4n^2}{8n^3}$;

• $d_n = \frac{1 - u_n}{u_n + 5}$ où la suite (u_n) vérifie :

• $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -5$; • $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > -5$.

♦ **SN.36** Soit u la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 4u_n + 9 \end{cases} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

- 1) Démontrer que la suite u n'est ni arithmétique, ni géométrique.

- 2) Soit v la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$v_n = u_n + 3.$$

- a) Démontrer que v est une suite géométrique.
b) En déduire le terme général de v puis celui de u .
c) En déduire si u admet une limite.

- 3) a) Calculer la somme $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$.
b) S_n admet-elle une limite?

♦ **SN.37** Soit u la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_n = 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n + 3.$$

- 1) u est-elle monotone?
- 2) Déterminer si u admet une limite.
- 3) Pour tout entier naturel p , on pose $v_p = u_{2p}$. Démontrer que v est décroissante.
- 4) Pour tout entier naturel p , on pose $w_p = u_{2p+1}$. Démontrer que w est croissante.
- 5) Démontrer que pour tout entier p :

$$v_p - w_p = \frac{3}{2^{2p}}.$$

♦ **SN.38** En utilisant la méthode la plus adaptée, déterminer pour chacune des suites de terme général ci-dessous :

- son sens de variation ;
- sa limite si elle existe.

- 1) $u_n = 3n \times \left(\frac{1}{3}\right)^n, (n \in \mathbb{N}^*)$
On pourra montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,$
 $0 \leq u_{n+1} \leq \frac{2}{3}u_n$, puis que $0 \leq u_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} u_1$.
- 2) $u_n = \frac{2^{2n+2}}{3^n}$.
- 3) $u_n = \frac{0,5^n}{n}, (n \in \mathbb{N}^*)$.
On pourra remarquer que $0 \leq u_n \leq 0,5^n$.

♦ **SN.39** James Bond joue au poker contre LeChiffre, mafiat international qui utilise ses gains pour ses riches clients.

Lors d'une « main » dans cette partie de poker, James est seul face à LeChiffre, les autres joueurs ayant trop peur de perdre leur argent face à ce redoutable adversaire. James et LeChiffre jouent de la façon suivante :

- James débute la main en misant 200 euros, c'est la première mise ;
- LeChiffre décide de faire une « relance » en misant 2 fois cette somme, plus 150 euros (pour tenter d'intimider James) ; c'est la deuxième mise ;
- James décide alors de faire sa première relance en misant 2 fois la somme que vient de déposer LeChiffre dans le pot, plus 150 euros ; c'est la troisième mise ;
- Et ils poursuivent ainsi de suite.

Pour un entier naturel n non nul, on note u_n la n -ième mise de cette main. Ainsi, $u_1 = 200$.

- 1) Quelle est la valeur de u_2 ? De u_3 ?
- 2) (u_n) est-elle arithmétique ? Géométrique ?
- 3) Expliquer pourquoi pour tout entier non nul n on a :

$$u_{n+1} = 2u_n + 150.$$

- 4) Compléter l'algorithme suivant pour calculer la valeur u_n pour une valeur de n donnée :

```
1  def mise_u(n):
2      u=.....
3      for i .....:
4          u=.....
5      return .....
```

- 5) De combien LeChiffre relance-t-il à sa 6ème relance ?
- 6) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^* : w_n = u_n + 150$.
 - a) Démontrer que (w_n) est géométrique, préciser sa raison et son premier terme.
 - b) Montrer que pour tout entier non nul n on a :

$$u_n = 350 \times 2^{n-1} - 150.$$

- 7) Quelle est la somme totale dans le pot après la n -ième mise ?
- 8) LeChiffre jette l'éponge après la p -ième relance de James. Combien LeChiffre perd-il au total ?

Récurrence et limites

♦ **SN.40 (Polynésie 2023 sujet 1)** Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = -1$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 0,9u_n - 0,3.$$

- 1) Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = 2 \times 0,9^n - 3.$$

- 2) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-3 < u_n \leq -1$.
- 3) Démontrer que la suite (u_n) est strictement décroissante.
- 4) Démontrer que la suite (u_n) converge et préciser sa limite.

♦ **SN.41 (DS 2020)**

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,
 $u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n + 8}$.

- 1) a) Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.
b) En déduire les variations de la suite (u_n) .
c) Que peut-on en déduire sur la suite (u_n) ?
- 2) a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$u_n \leq \frac{7}{8^n}.$$

- b) En déduire la limite de (u_n) .
- c) Justifier qu'il existe un entier naturel n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$,

$$u_n < 10^{-18}.$$

- d) Compléter le programme Python suivant pour qu'il renvoie la valeur n_0 .

```

1 u=...
2 n=...
3 while ..... :
4     n=...
5     u=...
6 print(...)
```

- e) Donner alors la valeur n_0 .

- 3) Soit (v_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$v_n = 1 + \frac{7}{u_n}.$$

- a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 8 dont on précisera le premier terme.
b) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{7}{8^{n+1} - 1}$.
c) Retrouver à partir de son expression, la limite de la suite (u_n) .

- ♦ **SN.42 (Inégalité de Bernoulli)** Démontrer par récurrence sur n que pour tout entier naturel n et tout $x > -1$ on a :

$$(1+x)^n \geq 1+nx.$$

- ♦ **SN.43 (Importance des deux hypothèses)**

- 1) Montrer que la proposition « $10^n + (-1)^n$ est divisible par 11 », notée $P(n)$ où $n \in \mathbb{N}$, est *héréditaire*.
2) Montrer que $P(0)$ et $P(1)$ sont fausses. Peut-on en déduire que $P(2)$ est fausse ?
3) Montrer que la proposition « $10^n - (-1)^n$ est divisible par 11 », où $n \in \mathbb{N}$, est vraie pour tout entier $n \geq 1$.
4) En déduire que $P(n)$ est fausse pour tout entier naturel n . On remarquera que $10^n + (-1)^n = 10^n - (-1)^n + 2 \times (-1)^n$.

BAC

- ♦ **SN.44 (Amérique du Nord sujet 2 2024)** On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[0; 1]$ par

$$g(x) = 2x - x^2.$$

- 1) Montrer que la fonction g est strictement croissante sur l'intervalle $[0; 1]$ et préciser les valeurs de $g(0)$ et de $g(1)$.

On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 &= \frac{1}{2} \\ u_{n+1} &= g(u_n) \end{cases}$ pour tout entier naturel n .

- 2) Calculer u_1 et u_2 .
3) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a : $0 < u_n < u_{n+1} < 1$.

- 4) En déduire que la suite (u_n) est convergente.
5) Déterminer la limite ℓ de la suite (u_n) .

def seuil() :

n=0

u=0.5

while u < 0.95 :

n=...

u=...

return n

- 6) Recopier et compléter le script Python ci-contre afin que celui-ci renvoie le rang n à partir duquel la suite dépasse 0,95.

- ♦ **SN.45 (Centres étrangers 2024 Sujet 1)** On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 1]$ par

$$f(x) = 2xe^{-x}.$$

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0; 1]$.

- 1) a) Démontrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[0; 1]$,

$$f'(x) = 2(1-x)e^{-x}.$$

- b) Donner le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0; 1]$.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0,1$ et pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = f(u_n).$$

- 2) a) Démontrer par récurrence que, pour tout n entier naturel,

$$0 \leq u_n < u_{n+1} \leq 1.$$

- b) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

- ♦ **SN.46 (Amérique du Nord 2017)** Le but de cet exercice est d'étudier les suites de termes positifs dont le premier terme u_0 est strictement supérieur à 1 et possédant la propriété suivante : pour tout entier naturel $n > 0$, la somme des n premiers termes consécutifs est égale au produit des n premiers termes consécutifs.

On admet qu'une telle suite existe et on la note (u_n) . Elle vérifie donc trois propriétés :

- $u_0 > 1$,
- pour tout $n \geq 0$, $u_n \geq 0$,
- pour tout $n > 0$, $u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} = u_0 \times u_1 \times \dots \times u_{n-1}$.

- 1) On choisit $u_0 = 3$. Déterminer u_1 et u_2 .

- 2) Pour tout entier $n > 0$, on note $s_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} = u_0 \times u_1 \times \dots \times u_{n-1}$.

On a en particulier $s_1 = u_0$.

- a) Vérifier que pour tout entier $n > 0$, $s_{n+1} = s_n + u_n$ et $s_n > 1$.

- b) En déduire que pour tout entier $n > 0$,

$$u_n = \frac{s_n}{s_n - 1}.$$

- c) Montrer que pour tout $n \geq 0$, $u_n > 1$.
- 3) À l'aide de l'algorithme ci-dessous, on veut calculer le terme u_n pour une valeur de n donnée.
- a) Recopier et compléter la partie traitement de l'algorithme ci-dessous.

Entrée :	Saisir n
	Saisir u
Traitement :	s prend la valeur u
	Pour i allant de 1 à n :
	u prend la valeur ...
	s prend la valeur ...
	Fin Pour
Sortie :	Afficher u

- b) Le tableau ci-dessous donne des valeurs arrondies au millièmes de u_n pour différentes valeurs de l'entier n :

n	0	5	10	20	30	40
u_n	3	1,140	1,079	1,043	1,030	1,023

Quelle conjecture peut-on faire sur la convergence de la suite (u_n) ?

- 4) a) Justifier que pour tout entier $n > 0$, $s_n > n$.
- b) En déduire la limite de la suite (s_n) puis celle de la suite (u_n) .

♦ **SN.47 (Asie 2016)** Une société produit des bactéries pour l'industrie. En laboratoire, il a été mesuré que, dans un milieu nutritif approprié, la masse de ces bactéries, mesurée en grammes, augmente de 20 % en un jour.

La société met en place le dispositif industriel suivant.

Dans une cuve de milieu nutritif, on introduit initialement 1 kg de bactéries. Ensuite, chaque jour, à heure fixe, on remplace le milieu nutritif contenu dans la cuve. Durant cette opération, 100 g de bactéries sont perdus.

L'entreprise se fixe pour objectif de produire 30 kg de bactéries.

Les parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A - Premier modèle - avec une suite

On modélise l'évolution de la population de bactéries dans la cuve par la suite (u_n) définie de la façon suivante :

$$\begin{cases} u_0 = 1\,000 \\ u_{n+1} = 1,2u_n - 100 \end{cases} \text{ pour tout entier naturel } n.$$

- 1) a) Expliquer en quoi ce modèle correspond à la situation de l'énoncé.

On précisera en particulier ce que représente u_n .

- b) L'entreprise souhaite savoir au bout de combien de jours la masse de bactéries dépassera 30 kg. À l'aide de la calculatrice, donner la réponse à ce problème.

- c) On peut également utiliser l'algorithme suivant pour répondre au problème posé dans la question précédente.

Recopier et compléter cet algorithme.

Variables	u et n sont des nombres
Traitement	u prend la valeur 1 000 n prend la valeur 0 Tant que faire u prend la valeur n prend la valeur $n + 1$ Fin Tant que
Sortie	Afficher

- 2) a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $u_n \geq 1\,000$.

- b) Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

- 3) On définit la suite (v_n) par : pour tout entier naturel n , $v_n = u_n - 500$.

- a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique.

- b) Exprimer v_n , puis u_n , en fonction de n .

- c) Déterminer la limite de la suite (u_n) .

Partie B - Second modèle - avec une fonction

On verra plus tard.

- ♦ **SN.48 (Centres étrangers 2015)** Soit a un nombre réel fixé non nul.

Le but de cet exercice est d'étudier la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = a \quad \text{et, pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = e^{2u_n} - e^{u_n}.$$

On remarquera que cette égalité peut aussi s'écrire : $u_{n+1} = e^{u_n}(e^{u_n} - 1)$.

- 1) Soit g la fonction définie pour tout réel x par :

$$g(x) = e^{2x} - e^x - x.$$

- a) Calculer $g'(x)$ et prouver que, pour tout réel x : $g'(x) = (e^x - 1)(2e^x + 1)$.

- b) Déterminer les variations de la fonction g et donner la valeur de son minimum.
- c) En remarquant que $u_{n+1} - u_n = g(u_n)$, étudier le sens de variation de la suite (u_n) .

2) Dans cette question, on suppose que $a \leq 0$.

- a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $u_n \leq 0$.
- b) Dédire des questions précédentes que la suite (u_n) est convergente.
- c) Dans le cas où a vaut 0, donner la limite de la suite (u_n) .

3) Dans cette question, on suppose que $a > 0$.

La suite (u_n) étant croissante, la question 1. permet d'affirmer que, pour tout entier naturel n , $u_n \geq a$.

- a) Démontrer que, pour tout entier naturel n , on a : $u_{n+1} - u_n \geq g(a)$.
- b) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a : $u_n \geq a + n \times g(a)$.
- c) Déterminer la limite de la suite (u_n) .

4) Dans cette question, on prend $a = 0,02$.

L'algorithme suivant a pour but de déterminer le plus petit entier n tel que $u_n > M$, où M désigne un réel positif. Cet algorithme est incomplet.

Variables	n est un entier, u et M sont deux réels
Initialisation	u prend la valeur 0,02 n prend la valeur 0 Saisir la valeur de M
Traitement	Tant que Fin tant que
Sortie	Afficher n

- a) Sur la copie, recopier la partie « Traitement » en la complétant.
- b) À l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur que cet algorithme affichera si $M = 60$.

♦ **SN.49 (Sujet 1 EDS 2020)** La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n + 1 \end{cases} \text{ pour tout entier naturel } n.$$

- 1) Calculer, en détaillant les calculs, u_1 et u_2 sous forme de fraction irréductible.

L'extrait reproduit ci-contre, d'une feuille de calcul réalisée avec un tableau présente les valeurs des premiers termes de la suite (u_n) .

	A	B
1	n	u_n
2	0	1
3	1	1,75
4	2	2,5625
5	3	3,421875
6	4	4,31640625

- a) Quelle formule, étirée vers le bas, peut-on écrire dans la cellule B3 de la feuille de calcul pour obtenir les termes successifs de (u_n) dans la colonne B?
- b) Conjecturer le sens de variation de la suite (u_n) .
- 3) a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a :

$$n \leq u_n \leq n + 1.$$

- b) En déduire, en justifiant la réponse, le sens de variation et la limite de la suite (u_n) .

- c) Démontrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n} = 1$.

- 4) On désigne par (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par

$$v_n = u_n - n.$$

- a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{3}{4}$.

- b) En déduire que, pour tout entier naturel n , on a :

$$u_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n + n.$$

♦ **SN.50 (Sujet 2 EDS 2020)** On considère les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 = v_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + v_n \\ v_{n+1} = 2u_n + v_n. \end{cases}$$

Dans toute la suite de l'exercice, **on admet** que les suites (u_n) et (v_n) **sont strictement positives**.

- 1) a) Calculez u_1 et v_1 .
- b) Démontrer que la suite (v_n) est strictement croissante, puis en déduire que, pour tout entier naturel n ,

$$v_n \geq 1.$$

- c) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a :

$$u_n \geq n + 1.$$

- d) En déduire la limite de la suite (u_n) .

- 2) On pose, pour tout entier naturel n :

$$r_n = \frac{v_n}{u_n}.$$

On admet que :

$$r_n^2 = 2 + \frac{(-1)^n}{u_n^2}.$$

a) Démontrer que pour tout entier naturel n :

$$-\frac{1}{u_n^2} \leq \frac{(-1)^{n+1}}{u_n^2} \leq \frac{1}{u_n^2}.$$

b) En déduire :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{u_n^2}.$$

c) Déterminer la limite de la suite (r_n^2) et en déduire que r_n converge vers $\sqrt{2}$.

d) Démontrer que pour tout entier naturel n ,

$$r_{n+1} = \frac{2+r_n}{1+r_n}.$$

e) On considère le programme suivant écrit en langage Python :

```
1 def seuil() :
2     n=0
3     r=1
4     while abs(r-sqrt(2))>10**(-4) :
5         r=(2+r)/(1+r)
6         n=n+1
7     return n
```

(**abs** désigne la valeur absolue, **sqrt** la racine carrée et **10**(-4)** représente 10^{-4})

La valeur n renvoyée par ce programme est 5.

À quoi correspond-elle ?

Autres

♦ **SN.51 (Sommes télescopiques)** On pose pour tout entier $k \geq 1$: $a_k = \frac{1}{k(k+1)}$.

1) Montrer que pour tout entier $k \geq 1$:

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$

2) En déduire que $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ converge et donner sa limite.

On considère de même $b_k = \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

1) Montrer que pour tout entier $k \geq 1$:

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right).$$

2) En déduire que $B_n = \sum_{k=1}^n b_k$ converge et donner sa limite.

♦ **SN.52 (Une autre somme)**

1) Montrer que pour tout entier naturel k :

$$\frac{4k}{4k^4+1} = \frac{2k^2+2k+1-(2k^2-2k+1)}{(2k^2+2k+1)(2k^2-2k+1)}.$$

2) En déduire que

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{4k}{4k^4+1}$$

converge et donner sa limite.

♦ **SN.53** ($\lim u_n w_n = 1$) Soient (u_n) et (w_n) deux suites telles que $\lim u_n w_n = 1$ et pour tout entier n , $0 \leq u_n \leq 1$ et $0 \leq w_n \leq 1$.

1) Montrer que pour tout entier n :

$$0 \leq u_n w_n \leq u_n \text{ et } 0 \leq u_n w_n \leq w_n.$$

2) En déduire que (u_n) et (w_n) convergent vers 1.

♦ **SN.54 (Convergente donc bornée)** En revenant à la définition de la convergence, démontrer que toute suite réelle convergente est bornée.