

Chapitre 1 | Intervalles

Le seul enseignement qu'un professeur peut donner, à mon avis, est de penser devant ses étudiants.
Henri-Léon Lebesgue (1875-1941).

I L'ensemble $\mathbf{R}$

1.1.1 Rappels sur les nombres réels

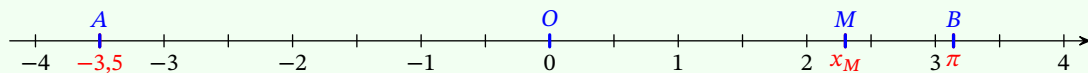
Définition 1 (L'ensemble $\mathbf{R}$) — Tous les nombres vus jusqu'ici font partie d'un ensemble : celui des **nombres réels**. Il est noté $\mathbf{R}$.

 **Exemple 1**

1.1.2 Représentation sur la droite numérique

Définition 2 (Droite numérique) — Graphiquement, on peut représenter les nombres réels sur une droite orientée. Chaque point de la droite est repéré par un nombre, qui est appelé l'**abscisse** de ce point. Dans l'exemple ci-dessous, l'abscisse du point M est x_M : on le lit « x indice M ». À l'oral, on dit parfois plus rapidement, quand il n'y a pas de confusion possible : « $x M$ ».

 **Exemple 2** Quelles sont les valeurs de x_A et x_B ?



Comment peut-on **encadrer** l'abscisse du point M ?

Définition 3 (Origine de l'axe) —

II Intervalles de $\mathbf{R}$

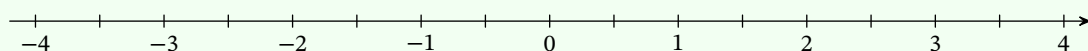
1.2.1 Définitions

Définition 4 (Symboles d'ordre) — Pour ordonner les nombres, on utilise quatre symboles :

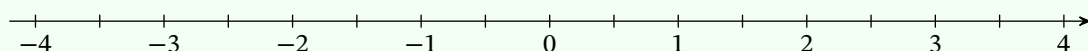
- $\leq$ signifie
- $\geq$ signifie
- $<$ signifie
- $>$ signifie

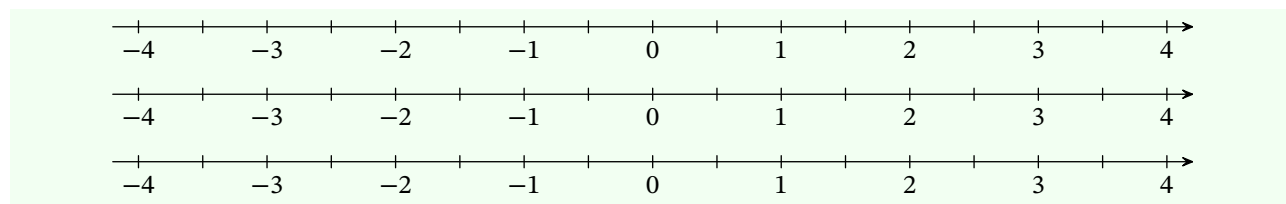
Définition 5 (Intervalle de $\mathbf{R}$) — Un **intervalle** de $\mathbf{R}$ est un sous-ensemble I de $\mathbf{R}$ tel que si x et y appartiennent à I dans l'ordre $x \leq y$, alors tout nombre z tel que $x \leq z \leq y$ appartient aussi à I .

 **Exemple 3** Visuellement, un intervalle de $\mathbf{R}$ est un sous-ensemble "d'un seul tenant", qu'on peut dessiner sans lever le stylo. Par exemple, le sous-ensemble rouge ci-dessous n'est pas un intervalle.



Alors que les sous-ensembles bleus sont tous des intervalles :





Proposition 1.1 (Intervalles réels, admis) — Il existe 9 types d'intervalles réels et on peut caractériser chacun d'eux par une inégalité. Lorsque le crochet inclut la borne de l'intervalle, celle-ci appartient à l'intervalle (on parle de borne **fermée**). Si le crochet exclut la borne, celle-ci n'appartient pas à l'intervalle (on parle de borne **ouverte**).

L'intervalle noté :	est l'ensemble des réels x tels que :	Visualisation
$[a, b]$	$a \leq x \leq b$	
$]a, b[$	$a < x < b$	
$[a, b[$	$a \leq x < b$	
$]a, b]$	$a < x \leq b$	
$[a, +\infty[$	$x \geq a$	
$]a, +\infty[$	$x > a$	
$] - \infty, b]$	$x \leq b$	
$] - \infty, b[$	$x < b$	
$] - \infty, +\infty[$	pas de contrainte sur x	

Définition 6 (Symboles $\in$ et $\notin$) —

1.2.2 Réunion, intersection d'intervalles

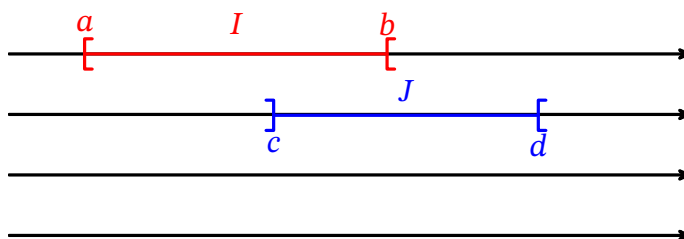
Dans tout ce paragraphe, I et J désignent des intervalles réels.

Définition 7 (Union, intersection d'intervalles) — On appelle union (ou réunion) de I et J l'ensemble des nombres réels qui appartiennent à I OU à J , et on note $I \cup J$ l'union de I et J .

On appelle intersection de I et J l'ensemble des nombres réels qui appartiennent à I ET à J , et on note $I \cap J$ l'intersection de I et J .

Remarque 1 Le OU de l'union de I et J n'est pas exclusif : si un nombre x appartient à I ET à J , alors il appartient à I donc à $I \cup J$.

Visualisation de l'union et de l'intersection sur un exemple :



III Encadrement et valeurs approchées

1.3.1 Rappel sur les puissances de 10

Si n est un entier naturel (c'est-à-dire, un entier positif), alors :

$$10^n = \quad \quad \quad \text{et} \quad \quad 10^{-n} =$$

 **Exemple 4** • $10^5 =$ • $10^{-3} =$

1.3.2 Encadrement

Définition 8 — Soient a, b et x des réels. Si $a \leq x \leq b$, on dit que a et b **encadrent** x , et la double inégalité $a \leq x \leq b$ est appelée un **encadrement** de x . Le réel $b - a$ est alors appelé l'**amplitude** de l'encadrement.

 **Exemple 5**

-
-
-

Remarque 2 Dire que deux réels a et b encadrent un réel x équivaut à dire que $x \in [a; b]$.

1.3.3 Valeurs approchées

Définition 9 — Soient x un réel et n un entier naturel. On suppose que a et b sont deux nombres décimaux ayant au maximum n chiffres après la virgule, que a et b encadrent x et que $b - a = 10^{-n}$. On dit alors que :

- a est une **valeur approchée par défaut** à 10^{-n} près de x .
- b est une **valeur approchée par excès** à 10^{-n} près de x .

 **Exemple 6**

- L'encadrement $1,414 \leq \sqrt{2} \leq 1,415$ montre que 1,414 est une valeur approchée par défaut à 10^{-3} près de $\sqrt{2}$ et 1,415 est une valeur approchée par excès à 10^{-3} près de $\sqrt{2}$.
- L'encadrement $3,12 \leq \pi \leq 3,15$ ne permet pas de déterminer une valeur approchée de π à 10^{-2} près car l'amplitude est supérieure à 10^{-2} .
- Si x est un réel tel que $1,4999 \leq x \leq 1,5$, on peut en déduire que $1,4999 \leq x \leq 1,5000$, donc 1,4999 est une valeur approchée par défaut à 10^{-4} près de x et 1,5 est une valeur approchée par excès à 10^{-4} près de x .

Remarque 3 Si x est un réel positif dont on connaît le début du développement décimal, on peut obtenir une valeur approchée par défaut par **troncature** et une valeur approchée par excès en ajoutant 1 au dernier chiffre de la troncature.

 **Exemple 7** Le développement décimal de π est $\pi = 3,141592654 \dots$. Donc :

- une valeur approchée par défaut à 10^{-6} près de π est 3,141592 (on a tronqué après la 6^e décimale);
- une valeur approchée par excès à 10^{-6} près de π est 3,141593 (on a ajouté 1 à la dernière décimale de la troncature).

Définition 10 — Soit x un réel, n un entier naturel et a et b les valeurs approchées par défaut et par excès à 10^{-n} près de x définies ci-dessus.

La **valeur arrondie** ou **valeur approchée** de x à 10^{-n} près est celui des deux nombres a ou b qui est le plus proche de x .

Si x est à égale distance de a et b , on convient que la valeur arrondie de x est b .

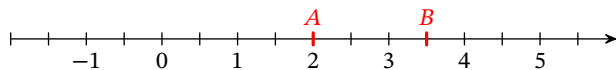
 **Exemple 8**

- La valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-2} près est
- La valeur approchée de $-\frac{2}{3}$ à 10^{-4} près est
- La valeur approchée de 1,4375 à 10^{-3} près est

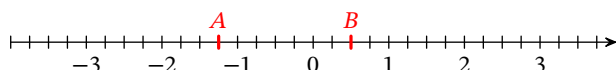
IV Exercices

Repérage

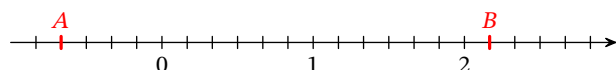
♦ **INT.1** Pour chaque axe ci-dessous, donner les abscisses des points A et B , nommées respectivement x_A et x_B :



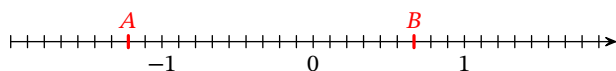
$$x_A = \quad x_B =$$



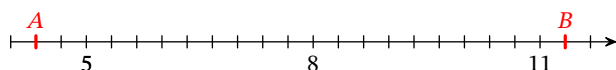
$$x_A = \quad x_B =$$



$$x_A = \quad x_B =$$

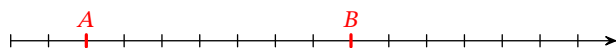


$$x_A = \quad x_B =$$



$$x_A = \quad x_B =$$

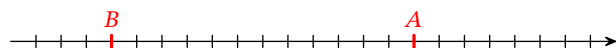
♦ **INT.2** (★) Pour chaque axe ci-dessous, indiquer les points d'abscisse 1 et 0 (s'ils ne sont pas déjà indiqués) en s'aidant des abscisses de A et B indiquées :



$$x_A = -1 \quad x_B = 2,5$$



$$x_A = -\frac{3}{2} \quad x_B = 2$$



$$x_A = \frac{5}{3} \quad x_B = -\frac{1}{3}$$

Intervalles

♦ **INT.3** En justifiant, dire si les phrases suivantes sont vraies ou fausses :

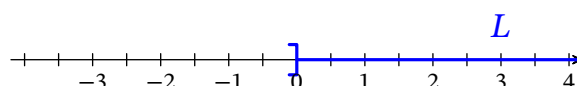
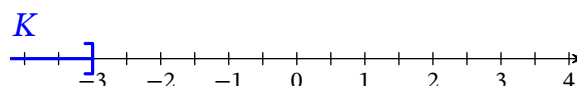
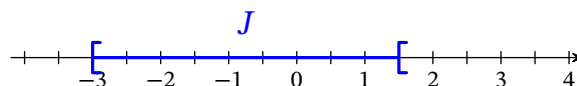
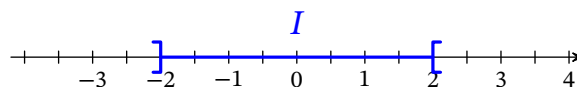
- $-3 \leq 0 < 10^{-2}$;
- $0,01 > 10^{-3} > -10^{-1}$;
- $\frac{1}{4} \leq \frac{1}{9}$;
- $\frac{3}{8} \leq \frac{5}{8}$.

♦ **INT.4** Compléter les pointillés par le symbole qui convient ($\in$ ou $\notin$).

- 1) $-2 \dots [-2; 1[$
- 2) $-3 \dots [-5; -1[$
- 3) $-\frac{26}{5} \dots] -5; -4[$
- 4) $4 \dots [-3; 4[$
- 5) $2\pi \dots]7; 8[$
- 6) $0 \dots] -\infty; +\infty[$

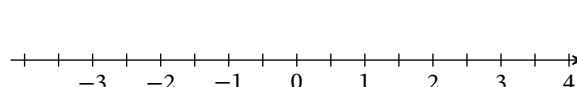
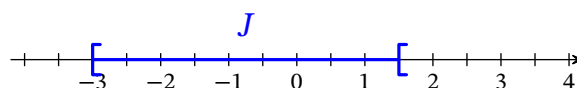
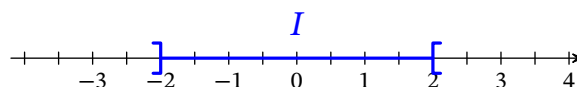
♦ **INT.5** (Visuellement)

- 1) Donner l'écriture (avec crochets) de chaque intervalle ci-dessous :



- 2) Caractériser les intervalles précédents à l'aide d'inégalités (par exemple, on recopiera et complètera la phrase suivante pour l'intervalle I : $Ix \in I \Leftrightarrow x \in \dots$).
- 3) Déterminer les ensembles suivants en utilisant pour les deux premiers les axes ci-dessous :

$$\bullet I \cap J; \quad \bullet I \cup J; \quad \bullet J \cup L; \quad \bullet K \cap L.$$



♦ **INT.6** Écrire chacun des ensembles suivants sous la forme d'un seul intervalle (ou $\emptyset$). Il est conseillé de représenter les ensembles sur la droite des réels, mais ce n'est pas obligatoire.

- $A = [-1; 8] \cap]2; 27[$
- $B =]-\infty; 5[\cup]-2; 8]$
- $C =]-\infty; 9[\cap]-8; +\infty[$
- $D =]-\infty; 9[\cup]-8; +\infty[$

♦ **INT.7** Compléter le tableau suivant :

L'ensemble	des réels vérifiant	se note
I	$-3 \leq x \leq 7$	
J	$-5 \leq x < -2$	
K		$]2;13]$
L	$x \leq 7$	
M	$1 < x$	

Déterminer ensuite :

- $I \cap J$, • $J \cap K$, • $I \cap L$,
- $I \cup J$, • $K \cup L$, • $K \cup M$.

Puissances de dix

♦ **INT.8** Écrire les nombres suivants sous la forme d'une puissance de dix :

- 100 • 0,01
- 1 000 000 • 0,000 001
- 100 000 000 000 • 100×10

♦ **INT.9** Écrire chaque entier suivant sous la forme 10^n où n est un entier relatif :

- $10^3 \times 10^5$ • $\frac{10^4}{10^3}$ • $\frac{10^{-7}}{10^{-4}}$
- $10^8 \times 10^{-2}$ • $\frac{10^{-3}}{10^2}$ • $(10^3)^4$

Puissances

Boîte à outils : puissances

Si a et b désignent des réels, m et p désignent des entiers relatifs alors :

- $a^m \times a^p = a^{m+p}$ • $\frac{a^m}{a^p} = a^{m-p}$
- $(a^m)^p = a^{m \times p}$ • $(ab)^m = a^m b^m$.
- $\left(\frac{1}{a}\right)^p = a^{-p}$ • $\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$

On n'oubliera pas la convention $a^0 = 1$.

♦ **INT.10** Écrire chaque nombre sous la forme la plus simple possible :

- $3^8 \times 3^4$ • $\frac{4^{-3}}{4^{-2}}$ • $\frac{5^{12} \times 25^{2500}}{125^{2^3^4}}$
- $(-9)^2 \times 9^{10}$ • $\frac{(-5)^6}{(-5)^{-6}}$ • $\frac{6^7 \times 2^4 \times 3^3}{27^3}$

♦ **INT.11** Sans calculatrice, déterminer les nombres égaux dans la liste ci-dessous.

$$A = 2^{100} \quad B = \frac{(-2)^{60}}{4^{-20}} \quad C = 100^2 \quad D = 5^4 \times 2^4$$

$$E = (2^{20})^5 \quad F = 200^2 \quad G = 50^4 \quad H = 10000$$

♦ **INT.12** Effectuer, sans calculatrice, les opérations suivantes.

$$1+3^2 \quad 2 \times 5^3 \quad (2 \times 5)^3 \quad 2^{-1} + 5^{-2} \quad 2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3}$$

♦ **INT.13** Soit a et b deux réels non nuls. Écrire les nombres suivants sous la forme $a^n b^m$ avec n et m des entiers relatifs.

- $A = a^2 \times b^3 \times \frac{a}{b}$
- $B = \frac{1}{a^4 b^7}$
- $C = \frac{a^{-2} b}{a^{-6} b^3}$
- $D = a \times \frac{1}{b^3} \times \left(\frac{a^2 b}{a^{-1} b^3}\right)^2$
- $E = [(ab^2)^{-2}]^3$

Encadrement, valeurs approchées

♦ **INT.14** En utilisant les valeurs affichées par la calculatrice et en écrivant les inégalités utilisées :

- donner un encadrement d'amplitude 10^{-3} de $\frac{1}{7}$.
- Donner une valeur approchée par défaut à 10^{-4} près de $\sqrt{3}$.
- Donner une valeur approchée par excès à 10^{-2} près de $\frac{\pi}{2}$.
- Donner la valeur arrondie au millièmes près de $1 - \sqrt{2}$.
- Donner une valeur approchée par défaut à 10^{-3} près de $-\frac{3}{11}$.
- Donner une valeur approchée par excès au centième de $-\frac{5}{6}$.
- Donner une valeur arrondie au millièmes de $-123,6775$.