

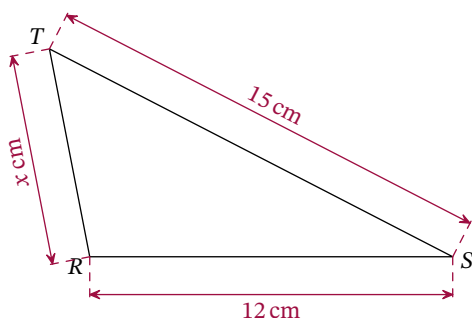
Premières équations

♦ **EQU.1** On considère l'égalité ci-dessous où x est un nombre réel.

$$5x + 2 = x + 10.$$

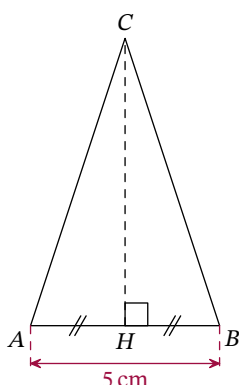
- 1) Comment s'appelle cette égalité ?
- 2) L'égalité est-elle vraie si $x = 3$?
- 3) 0 est-il une solution de cette équation ?
- 4) Résoudre cette équation.

♦ **EQU.2** Le triangle RST ci-dessous a un périmètre de 34 cm.



- 1) Écrire une égalité faisant intervenir la longueur x .
- 2) En résolvant l'équation ainsi obtenue, déterminer quelle est la longueur RT.

♦ **EQU.3** On considère le triangle ABC ci-dessous, isocèle en C. On sait que son aire est de 40 cm^2 .



- 1) Justifier que si H est le milieu de [AB], alors (CH) est perpendiculaire à (AB).
- 2) Écrire une égalité faisant intervenir la longueur CH que l'on renommera x .

- 3) En résolvant l'équation ainsi obtenue, déterminer quelle est la longueur CH.
- 4) À l'aide du théorème de Pythagore, calculer la longueur AC.

♦ **EQU.4** Magalie et Cyril sont allés faire des courses. Dans ce magasin, toutes les parts de gâteau ont le même prix. Cyril a acheté un sac à dos et trois parts de gâteau. Magalie a acheté deux troussees et cinq parts de gâteau. À la fin de leurs courses, ils se rendent compte qu'ils ont payé exactement la même somme.

Quel est le prix d'une part de gâteau ?



♦ **EQU.5** Simon et son père ont 26 ans d'écart. Dans 4 ans, la somme de leurs âges sera égale à 80. On cherche l'âge de Simon et on la note x (en années).

- 1) Quel est l'âge du père de Simon aujourd'hui, en fonction de x ?
- 2) Exprimer l'âge de Simon et l'âge de son père dans quatre ans en fonction de x .
- 3) En déduire que x doit vérifier l'équation

$$2x + 34 = 80.$$

- 4) En déduire l'âge de Simon.

Équations pour le plaisir

On résoudra les équations des exercices suivants en rédigeant correctement (utiliser quand on peut le symbole $\Leftrightarrow$). Sans rédaction, les calculs faits n'ont pas de sens !

Boîte à outils

- Une égalité reste vraie si on **ajoute ou soustrait** un même nombre aux deux membres de cette égalité.

Exemple 1

$$z + 4 = 12$$

$$\Leftrightarrow z + 4 - 4 = 12 - 4$$

$$\Leftrightarrow z = 8$$

Remarque 1 On vient de trouver une valeur de z pour laquelle l'égalité de départ est vraie, et en fait, on a même montré que c'est la seule solution de l'équation $z + 4 = 12$.

Boîte à outils

- Une égalité reste vraie si on **multiplie ou divise** les deux membres de cette égalité **par un même nombre non nul**.

Exemple 2

$$\begin{aligned} 5t &= 35 \\ \Leftrightarrow 5t \div 5 &= 35 \div 5 \\ \Leftrightarrow t &= 7 \end{aligned}$$

Boîte à outils

Pour ajouter ou soustraire des quotients, on commence par les écrire au même dénominateur.

◆ EQU.6 (Très facile)

- 1) $x + 2 = 5$
- 2) $x - 4 = 9$
- 3) $x - \frac{1}{3} = 1$
- 4) $x + \frac{5}{4} = \frac{3}{7}$

Boîte à outils

Diviser par un nombre revient à multiplier par son inverse.

◆ EQU.7 (Facile)

- 1) $3x = 1$
- 2) $8x = 5$
- 3) $\frac{1}{4}x = -2$
- 4) $\frac{3}{7}x = \frac{6}{14}$

◆ EQU.8 (Tranquille)

- 1) $2x + 1 = 0$
- 2) $7x - 3 = 0$
- 3) $8 - 2x = 0$
- 4) $10 + 3x = 0$

◆ EQU.9 (Premier degré)

- 1) $3x + 7 = 2x - 1$
- 2) $2x - 4 = 3 + 5x$
- 3) $4x - 9 = 2x + \frac{2}{3}$
- 4) $\frac{3}{4}x - \frac{7}{9} = \frac{2}{5}x + 1$

◆ EQU.10 (Premier degré)

- 1) $4(x + 2) = x + 17$
- 2) $-3(2x + 1) = 2x + 13$
- 3) $5(4x - 7) = -5x + 15$
- 4) $-(2x - 10) = 11x + 49$

◆ EQU.11 (Premier degré)

- 1) $3(x + 5) - 3 = 2(x + 7) + 4x - 9$
- 2) $-4(3x + 7) + 15 = 7(2x + 3) - 21$

Pour l'exercice suivant, on utilisera l'égalité des produits en croix ou la proposition suivante : si a et b sont deux nombres non nuls, alors $a = b$ est équivalent à $\frac{1}{a} = \frac{1}{b}$.

◆ EQU.12 (Premier degré et inverse)

- 1) $\frac{11}{x} = \frac{7}{22}$
- 2) $\frac{x}{8} = \frac{3x + 2}{20}$
- 3) $\frac{7}{2x} = \frac{3}{5x}$
- 4) $\frac{5x - 2}{x} = \frac{1 + 5x}{x - 1}$

Boîte à outils : $x^2 = a$

Pour résoudre l'équation $x^2 = a$ où a est un nombre réel et x l'inconnue :

- Si $a < 0$, alors cette équation **n'a pas de solution**;
- Si $a = 0$, alors cette équation admet $x = 0$ **comme unique solution**;
- Si $a > 0$, alors cette équation admet **deux solutions distinctes** : $x = \sqrt{a}$ et $x = -\sqrt{a}$.

◆ EQU.13 (Carrés)

- 1) $x^2 = 169$
- 2) $4x^2 + 2 = 102$
- 3) $9 + x^2 = (x + 1)^2$
- 4) $(x + 1)^2 = 144$

Boîte à outils : intégrité

Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul.

◆ EQU.14 (Équations produits)

- 1) $(2 - x)(3 + x) = 0$
- 2) $(x + 9)(2x - 3) = 0$
- 3) $(x + 1)(x - 2)(x + 3) = 0$
- 4) $(3x^2 - 27)(1 - x) = 0$
- 5) $(2x + 5)^2 = 0$
- 6) $(x^2 + 1)^2 = 0$

On pensera à factoriser le membre de gauche pour résoudre les équations de l'exercice suivant. Pour les deux dernières, penser à l'identité remarquable

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b).$$

◆ EQU.15 (Équations produits)

- 1) $8x^2 + 3x = 0$
- 2) $15x^2 + 5x = 0$
- 3) $49x^2 - 121 = 0$
- 4) $16 - 9x^2 = 0$

Petits problèmes algébriques

♦ **EQU.16** Quels sont les nombres réels tels que leur double augmenté de 5 soit égal à leur triple diminué de 7?

☞ **Indications exercice 16** : Si x est un nombre réel, son double augmenté de 5 est $2x + 5$.

♦ **EQU.17** Existe-t-il un nombre tel que son quintuple diminué de 8 soit égal à son triple augmenté de 10?

♦ **EQU.18** J'ajoute 21 au double d'un nombre, je trouve le même résultat que si je retranche le triple de ce nombre à 13. Quel est ce nombre?

♦ **EQU.19** Avec l'argent qu'il possède, Pierre veut acheter des livres qui valent tous le même prix. S'il en achète 3, il lui reste 28 €. S'il en achète 4, il lui manque 1 €.

Quel est le prix d'un livre?

☞ **Indications exercice 19** : Si x est le prix d'un livre, Pierre a $3x + 28$ euros en poche, qui est aussi égal à $4x - 1$ euros.

♦ **EQU.20** Émilie veut acheter plusieurs livres d'une même collection qui valent tous le même prix. Émilie : « Avec l'argent dont je dispose, si j'achète 4 livres il me reste 30 €, mais si j'en achète 6 il me manque 60 € ».

De quelle somme d'argent dispose Émilie avant d'acheter les livres?

☞ **Indications exercice 20** : S'inspirer de l'exercice précédent.

♦ **EQU.21** En additionnant un nombre entier, son double et son triple, je trouve 1998. Quel est ce nombre?

Quelques exercices utilisant la distributivité.

♦ **EQU.22** Quel nombre faut-il ajouter à 100 et à 20, pour que le plus grand nombre soit le triple du plus petit?

♦ **EQU.23** Je veux retrancher 100 et 10 à un même nombre, et que le plus grand reste soit le quadruple du plus petit. Quel nombre faut-il choisir?

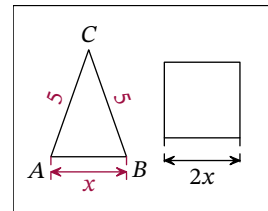
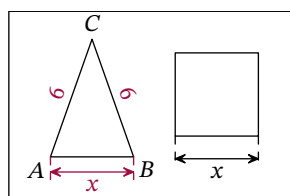
♦ **EQU.24** On veut ajouter à 20, et retrancher à 100, un même nombre de façon que le premier nombre obtenu soit le quadruple du second. Quel nombre faut-il choisir?

♦ **EQU.25** Une grand mère a 81 ans et sa petite fille a 9 ans. Dans combien de temps l'âge de la grand mère sera-t-il le quadruple de l'âge de la petite fille?

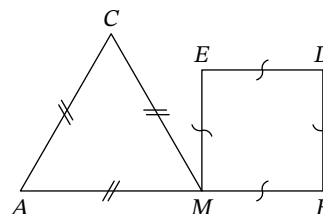
♦ **EQU.26** Pierre dit « Il y a 10 ans, j'avais la moitié de l'âge que j'aurai dans 10 ans ». Quel est l'âge de Pierre?

Petits problèmes géométriques

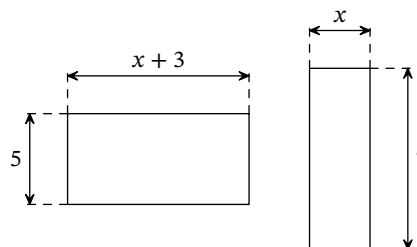
♦ **EQU.27** Dans chacun des cas ci-dessous, peut-on déterminer x tel que le périmètre du triangle soit égal à celui du carré?



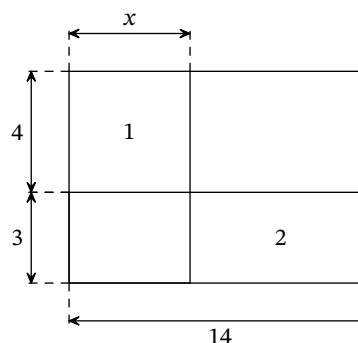
♦ **EQU.28** Déterminer les longueurs de chaque côté dans la figure suivante sachant que le triangle équilatéral et le carré ont le même périmètre et que $AB = 10$ cm.



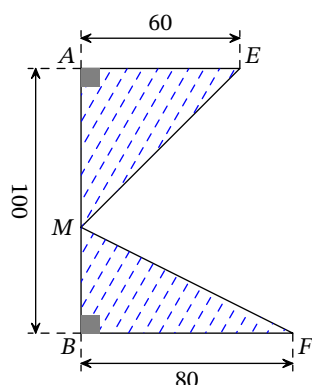
♦ **EQU.29** Déterminer x pour que la différence entre l'aire du rectangle de droite et celui de gauche soit de cinquante unités d'aires.



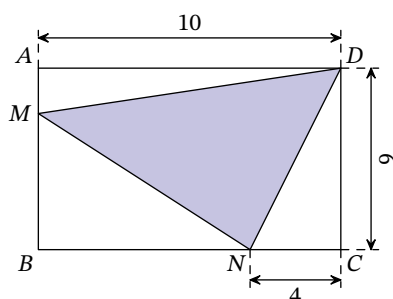
♦ **EQU.30** Déterminer une valeur de x telle que l'aire du rectangle 1 soit égale à l'aire du rectangle 2.



♦ **EQU.31** Sachant que dans la figure ci-dessous, les triangles AME et BMF ont la même aire, calculer la longueur AM.

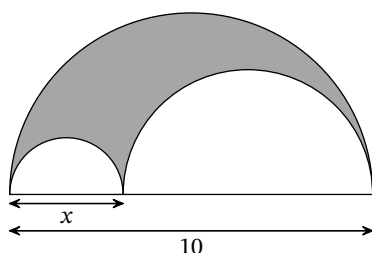


- ♦ **EQU.32** Sur la figure ci-dessous, on a un rectangle ABCD, M est un point de [AB] et N un point de [BC]. L'aire du triangle MND est de 28 unités d'aire. Quelle est la longueur AM?



Problèmes

- ♦ **EQU.33** Soit x un réel strictement compris entre 0 et 10. Que peut-on dire du périmètre de la figure colorée (formée avec des demi-cercles) ci-dessous?



- ♦ **EQU.34 (Un résultat très surprenant)** On suppose que le sol de la Terre forme une sphère parfaite de rayon R , et qu'on peut étendre un câble le long de l'équateur. Ce câble étant tendu, on rajoute alors un mètre de longueur à ce câble. À quelle hauteur du sol sera-t-il alors pour être parfaitement tendu?

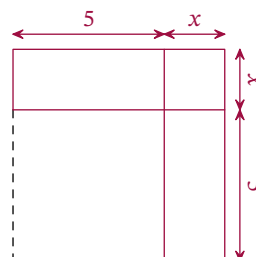
- ♦ **EQU.35** Jacques fait un aller-retour en voiture, et on suppose qu'il parcourt la même distance à l'aller et au retour. On suppose de plus qu'à aller, sa vitesse est

constante et vaut 60 km.h^{-1} , et qu'au retour elle vaut 40 km.h^{-1} .

Quelle est sa vitesse moyenne sur l'ensemble du parcours?

- ♦ **EQU.36 (Une équation de degré deux)** Al-Kwhârizmî était un mathématicien et astronome persan du IX^e siècle. Pour résoudre l'équation $x^2 + 10x = 39$, il proposa la méthode géométrique suivante.

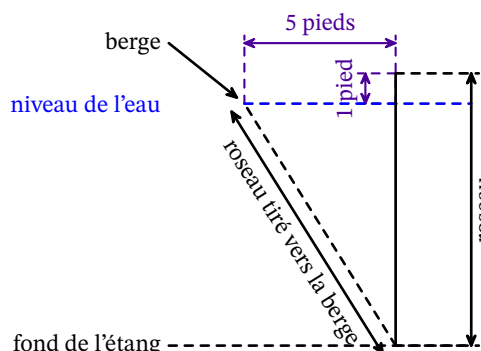
On considère le grand carré avec les dimensions suivantes :



- 1) Calculer l'aire des deux rectangles et du petit carré pourpres en fonction de x .
- 2) Calculer l'aire de la partie blanche.
- 3) Expliquer pourquoi, si x est solution de $x^2 + 10x = 39$, l'aire du grand carré de côté $x + 5$ est de 64.
- 4) Résoudre l'équation $x^2 + 10x = 39$ revient donc à résoudre l'équation $(x + 5)^2 = 64$. Trouver ainsi les solutions de l'équation $x^2 + 10x = 39$.

- ♦ **EQU.37 (Chine, entre -200 et 200)** Au centre d'un étang carré de côté 1 toise¹ pousse un roseau qui dépasse de l'eau de 1 pied. On tire sur l'extrémité du roseau jusqu'à la berge, et elle arrive alors exactement au niveau de l'eau. On se demande quelle est la profondeur de l'étang en son centre?

Parce que je suis vraiment très gentil, un petit dessin représentant la situation :



- ♦ **EQU.38 (Encore la Chine)** Une corde qui est attachée au sommet d'un arbre vertical dépasse de 3 pieds la longueur de cet arbre. En tirant la corde à son maximum

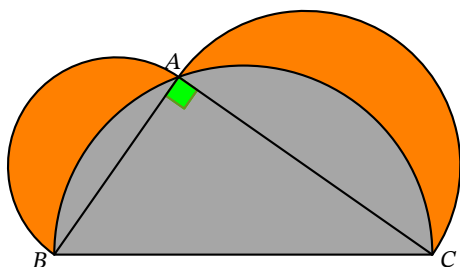
1. toise, pied : mesures chinoises. 1 toise = 10 pieds.

de manière que son extrémité touche le sol, on s'écarte exactement de 8 pieds du tronc de l'arbre.

Quelle est la longueur de la corde ?

♦ **EQU.39 (Inde, 12^e siècle)** Un bambou mesurant 32 coudées et s'élevant sur un terrain plat est brisé en un point par la force du vent : son extrémité vient rencontrer la terre à 16 coudées de son pied. À combien de coudées du pied a-t-il été brisé ?

♦ **EQU.40 (Lunules d'Hippocrate, 450 av JC)** ABC est un triangle rectangle en A et on construit les demi-disques de diamètres $[AB]$, $[AC]$ et $[BC]$ comme sur la figure ci-dessous.



Démontrer que l'aire des lunules (parties en orange) est égale à l'aire du triangle ABC .

♦ **EQU.41 (Leonard de Pise, 1202)** Deux tours élevées l'une de 30 pas, l'autre de 40, sont distantes de 50 pas ; entre les deux se trouve une fontaine vers le centre de laquelle deux oiseaux descendant des sommets des deux tours se dirigent du même vol et parviennent dans le même temps ; quelles sont les distances horizontales du centre de la fontaine aux deux tours ?