

Lorsqu'on a une fonction f , donnée avec une formule $f(x)$, on vous demandera régulièrement de calculer sa *dérivée*. La dérivée de cette fonction permet en général de répondre à plusieurs questions :

- Quel est le lien entre la valeur d'une dérivée et la tangente à une courbe ?
- Est-ce que f est croissante ou décroissante ? Sur quels intervalles ?
- Est-ce que la fonction f admet un maximum ou un minimum ?

1 Lien avec la tangente

Méthode 2.1 : Déterminer un nombre dérivé graphiquement

Le nombre dérivé d'une fonction en un point est le coefficient directeur de la tangente à la courbe de la fonction en ce point.

On va avoir besoin de la proposition suivante :

Proposition 2.1 (Coefficient directeur d'une droite) — Si une droite passe par deux points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ (où $x_A \neq x_B$) alors son coefficient directeur m est :

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

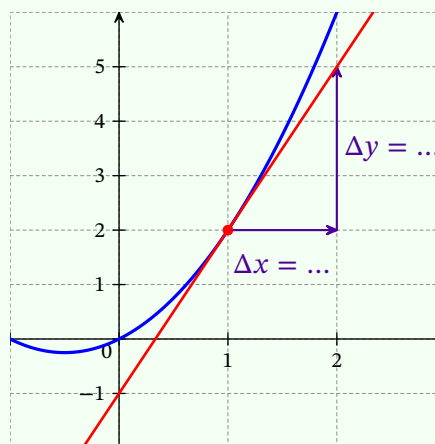
Exemple 1 Soit la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = x^2 + x$ et sa courbe ci-dessous (en bleu), ainsi que la tangente à la courbe au point d'abscisse 1 (en rouge).

Au point d'abscisse 1 :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\dots \dots}{\dots \dots} = \dots$$

C'est le **coefficient directeur de la tangente** au point d'abscisse 1.

Donc $f'(1) = \dots \dots$



Retrouvons ce résultat par le calcul :

- $f(x) = x^2 + x$ donc :
- $f'(x) =$
- $f'(1) =$

On peut aussi avoir besoin de l'**équation de la tangente** :

Proposition 2.2 (Équation de la tangente) — Si f est une fonction dérivable en a , alors f admet une tangente en a d'équation :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

En particulier, le coefficient directeur de cette tangente est $f'(a)$.

Dans notre exemple, on a :

- $f(1) =$
- $f'(1) =$
- donc l'équation de la tangente au point d'abscisse 1 est : $y =$

2 Quelques formules

On vous demande de connaître des formules permettant de calculer une dérivée. Je rappelle les principales formules pour dériver une expression ici :

Remarque 1 k est un nombre qui ne dépend pas de x (on dit que c'est une constante) et n est un entier naturel.

$f(x) =$	k	$mx + p$	x^2	x^n	$1/x^n$	$\sqrt{x}$	$\sin x$	$\cos x$	e^x
$f'(x) =$									

Pour les fonctions plus élaborées, on utilise les formules suivantes :

Remarque 2 u et v sont ici des fonctions.

fonction f	ku	$u + v$	uv	$\frac{1}{u}$	$\frac{u}{v}$	u^n	$\sqrt{u}$	e^u
dérivée f'								

♦ **MN 2.1** Compléter le tableau suivant :

$f(x) =$	10	$x^2 - 4$	$2/x$	$\cos x$	$12x^3$	$-9x^3$	$-7/x$	$\sin x$	$\frac{2x+1}{3+x}$	$(2x+1)e^{3x}$	$\frac{e^x}{x}$
$f'(x) =$											

Calculs pour les dernières :

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

♦ **MN 2.2** Donner l'expression des dérivées des fonctions définies par :

a) $f(x) = x^4 + 12x^2$

b) $g(x) = \frac{3}{x} - e^{-x^2}$

c) $u(x) = x^2 + 15x$ et $v(x) = e^{-2x}$

.....

.....

d) $f(x) = (x^2 + 15x)e^{-2x}$

.....

.....

.....

e) $f(x) = \frac{x^3 - 2}{x^2 + 10x}$

.....

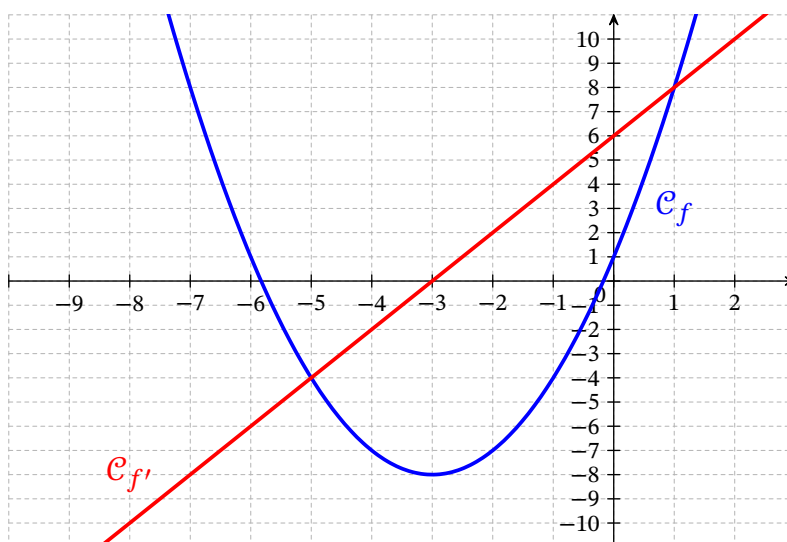
.....

.....

.....

3 Lien entre le signe de $f'(x)$ et les variations de f

Ci-dessous est tracée la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = x^2 + 6x + 1$ et de sa dérivée définie par $f'(x) = \dots\dots\dots$



1) Compléter le tableau de signe de $f'(x)$.

x	$-\infty$	$+\infty$
Signe de $f'(x)$		

2) Compléter les variations de la fonction f .

x	$-\infty$	$+\infty$
Variations de f		

Le lien mis en évidence est vrai pour toutes les fonctions dérivables : on a :

Théorème 2.3 — Si f est une fonction dérivable et $f'(x)$ l'expression de sa fonction dérivée alors :

- Si sur un intervalle, $f'(x) \geq 0$ alors, sur cet intervalle, f est
- Si sur un intervalle, $f'(x) \leq 0$ alors, sur cet intervalle, f est

♦ **MN 2.3** On considère la fonction f définie par $f(x) = 2x^3 + 9x^2 - 60x + 1$

1) Calculer l'expression de $f'(x)$.

.....

2) Montrer que $f'(x)$ peut s'écrire $(3x - 6)(2x + 10)$.

.....

.....

3) Dresser le tableau de signe de $f'(x)$:

Calculs nécessaires :

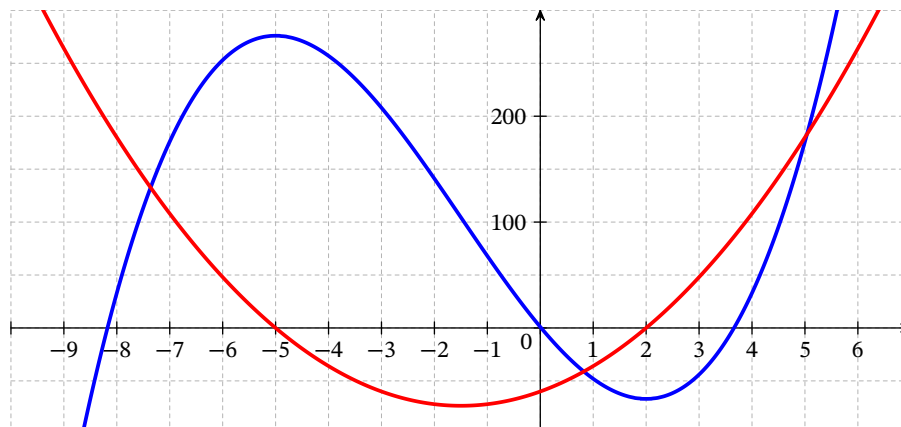
.....

x	$-\infty$	$+\infty$
Signe de		
Signe de		
Signe de $f'(x)$		

4) En déduire le tableau de variations de f :

x	$-\infty$	$+\infty$
Variations de f		

5) Laquelle des deux courbes ci-dessous est celle de f et laquelle est celle de f' ?



4 Quelques études de fonctions

♦ **MN 2.4** On considère la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = (5 - x)e^{-x^2}$.

1) Calculer, pour $x \in \mathbf{R}$, $f'(x)$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2) Dresser alors le tableau de variations de f :

x	$-\infty$	$+\infty$
Signe de		
Signe de $f'(x)$		
Variations de f		

♦ **MN 2.5** On considère la fonction définie sur $\mathbf{R}^*$ par $f(x) = \frac{3}{x} + 5x$.

1) Calculer, pour $x \in \mathbf{R}^*$, $f'(x)$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2) Dresser alors le tableau de variations de f (attention au domaine de définition) :

x	$-\infty$	$+\infty$
Signe de		
Signe de		
Signe de $f'(x) =$		
Variations de f		