

3 | Géométrie vectorielle - 1

Ce qui est affirmé sans démonstration peut être réfuté sans démonstration.

Euclide (vers 300 av J. -C.).

C'est aussi un autre sujet, auquel je pense par moments depuis près de 40 ans, à savoir les premiers fondements de la géométrie; je ne sais pas si je vous ai déjà parlé de mes vues à ce sujet. Je n'ai pas encore consolidé certaines choses, mais ma conviction que nous ne pouvons pas démontrer entièrement la géométrie de manière a priori est devenue de plus en plus ferme. Entre-temps, je n'ai probablement plus assez de temps pour tout cela, pour retravailler mes recherches inachevées en vue d'une publication publique, et cela ne se produira peut-être même pas de mon vivant, car je redoute le « cri des béotiens » si jamais j'exprimais mon opinion.

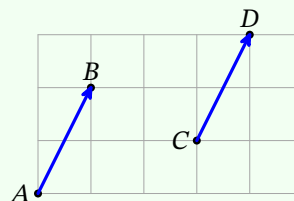
Carl Friedrich Gauss (1777-1855), dans une lettre à Bessel, le 27 juin 1829.

I Vecteurs

3.1.1 Définition

Définition 1 (Vecteur) — Au lycée, on définira un vecteur comme l'élément associé à une translation. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est l'élément associé à la translation qui envoie A sur B . Deux vecteurs sont donc **égaux** s'ils sont associés à la même translation.

Exemple 1



La translation qui envoie A sur B (ou qui transforme A en B) envoie C sur D . On peut donc écrire :

.....

Remarque 1 (fondamentale) Les flèches bleues de l'exemple 3.1.1 sont des **représentants** d'un même vecteur, qui peut être écrit $\overrightarrow{AB}$ ou $\overrightarrow{CD}$.

Remarque 2 Un vecteur peut aussi être représenté par une seule lettre (*une translation*), par exemple $\vec{u}$.

Définition 2 (Vecteur) — Un vecteur $\vec{u}$ du plan peut être déterminé par :

- sa **direction**;
- son **sens**;
- sa **norme** (qui correspond à sa longueur), et qui se note avec deux barres de chaque côté : $\|\vec{u}\|$.

Proposition 3.1 (Égalité entre vecteurs) — Deux vecteurs sont égaux s'ils ont :

-
-
-

Remarque 3 Pour un vecteur $\overrightarrow{AB}$:

- la **direction** de $\overrightarrow{AB}$ est la droite (AB) ;
- le **sens** de $\overrightarrow{AB}$ est de A vers B ;
- la **norme** de $\overrightarrow{AB}$ est la longueur AB : $\|\overrightarrow{AB}\| = AB$.

Proposition 3.2 (Égalité entre vecteurs, admis) — Soient A, B, C, D quatre points du plan. Les trois propositions suivantes sont équivalentes :

-
-
-

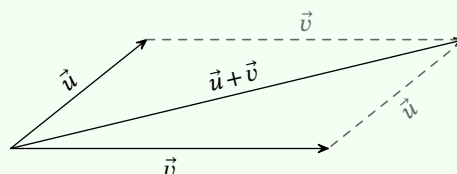
Remarque 4 « Propositions équivalentes » signifie que si l’une des propositions est vraie, alors elles sont toutes vraies.

3.1.2 Somme de vecteurs

Proposition 3.3 — L’enchaînement (on dit aussi **la composition**) de deux translations est une translation.

Définition 3 (Somme de vecteurs) — La somme de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur associé à l’enchaînement (on dit aussi la **composition**) des translations associées à $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Exemple 2 (Somme de vecteurs)



Proposition 3.4 (Commutativité) — Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a :

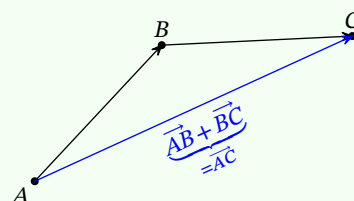
$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}.$$

3.1.3 Relation de Chasles

Proposition 3.5 (Relation de Chasles) — Pour tous points A, B et C du plan, on a :

$$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}.$$

Exemple 3 (Relation de Chasles)



3.1.4 Vecteurs opposés

Définition 4 (Vecteurs opposés) — On appelle **vecteur nul** le vecteur de norme nulle.

On le note $\vec{0}$, c’est aussi le vecteur associé à la translation qui laisse fixe chaque point.

Deux vecteurs sont dits **opposés** si leur somme est le vecteur nul, c’est-à-dire :

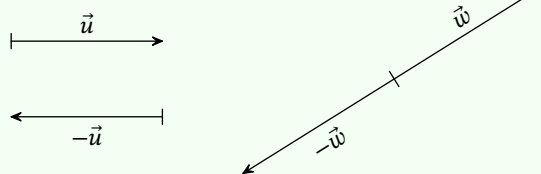
$$\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont opposés} \Leftrightarrow \vec{v} + \vec{u} = \vec{0}.$$

On peut noter alors $\vec{u} = -\vec{v}$ et de même $\vec{v} = -\vec{u}$.

Proposition 3.6 (admis) — Deux vecteurs sont opposés s’ils ont :

- même direction ;
- même norme ;
- des sens différents.

Exemple 4



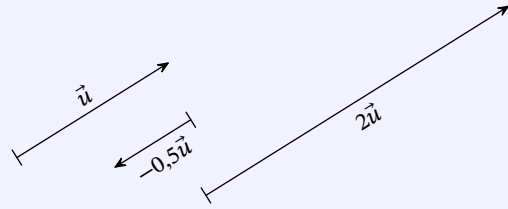
Proposition 3.7 (admis) — Pour tous points A et B du plan, on a :

$$-\vec{AB} = \vec{BA}.$$

3.1.5 Produit d'un vecteur par un réel

Définition 5 (Produit d'un vecteur par un réel) — Si $\vec{u}$ est un vecteur et λ un réel, alors le vecteur $\lambda\vec{u}$ est le vecteur qui a :

- même direction que $\vec{u}$;
- même sens que $\vec{u}$ si $\lambda \geq 0$, sens opposé à $\vec{u}$ si $\lambda \leq 0$;
- une norme égale à $\lambda \times \|\vec{u}\|$ si λ est positif, $-\lambda \times \|\vec{u}\|$ sinon.



Proposition 3.8 (Distributivité, admis) — Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, et pour tout réel λ , on a :

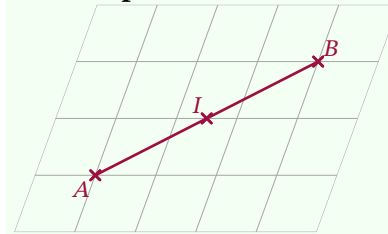
- $\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}$;
- $\lambda\vec{0} = \vec{0}$ et $0\vec{u} = \vec{0}$.

3.1.6 Milieu d'un segment

Proposition 3.9 — I est le milieu d'un segment $[AB]$ si et seulement si (propositions équivalentes) :

- $\vec{AI} = \vec{IB}$,
- $\vec{AB} = 2\vec{AI}$,
- $\vec{IA} = -\vec{IB}$.

Exemple 5



II Repères vectoriels et coordonnées

3.2.1 Repères

Définition 6 (Repère du plan) — Soient O un point du plan et $\vec{i}$ et $\vec{j}$ deux vecteurs non colinéaires (i.e de direction différentes). Alors $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est appelé un **repère** du plan.

- O est appelé **l'origine** du repère ;
- $(\vec{i}, \vec{j})$ est appelé une **base** du plan.

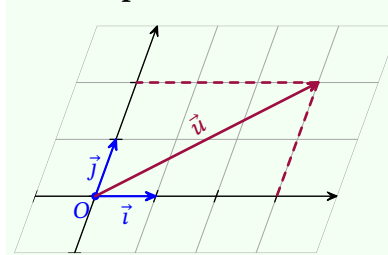
3.2.2 Coordonnées

Proposition 3.10 (Coordonnées dans un repère donné, admise) — Si $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère du plan, alors pour tout vecteur $\vec{u}$ du plan, il existe un unique couple de réels (x, y) tel que :

$$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}.$$

On note $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, x et y sont appelées les **coordonnées** de $\vec{u}$ dans ce repère.

Exemple 6

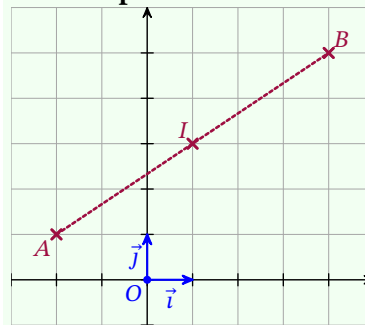


3.2.3 Milieu d'un segment

Proposition 3.11 — $I(x_I, y_I)$ est le milieu d'un segment $[AB]$, où $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$, si et seulement si

$$x_I = \frac{x_A + x_B}{2} \quad \text{et} \quad y_I = \frac{y_A + y_B}{2}.$$

Exemple 7



3.2.4 Repères particuliers

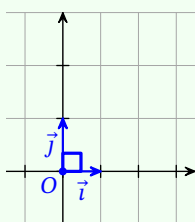
Définition 7 (Orthogonalité) — Deux vecteurs sont dits **orthogonaux** si ils forment un **angle droit**.

Définition 8 (Repère du plan) — Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan.

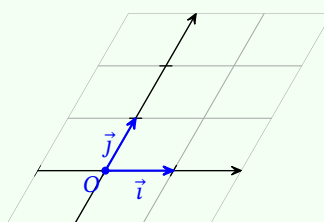
- Si les directions de $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont orthogonales, on dit que le repère est **orthogonal**;
- si les normes de $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont égales à 1, le repère est dit **normé**;
- Si les directions de $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont orthogonales et que les normes de $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont égales à 1, on dit que le repère est **orthonormé**.

Exemple 8

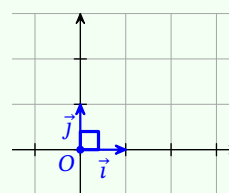
Repère orthogonal



Repère normé



Repère orthonormé



III Coordonnées et opérations

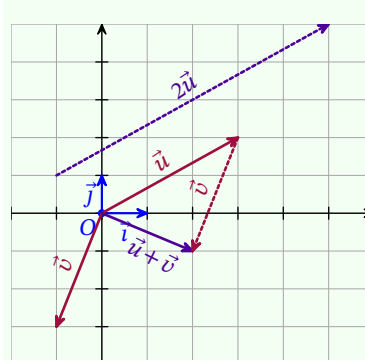
3.3.1 Somme de vecteurs, produit par un réel

Proposition 3.12 (Coordonnées et opérations, ad-

mise) — Soit $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs et k un nombre réel. Alors :

$$\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad k\vec{u} = \begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}.$$

Exemple 9



3.3.2 Coordonnées d'un point

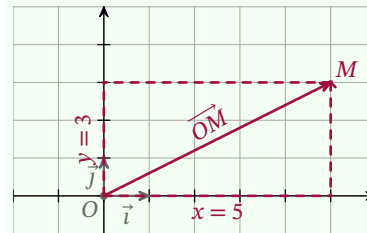
Définition 9 — Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan. Tout point M du plan peut être défini de manière unique par deux nombres x et y tels que :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

- x est appelé l'abscisse du point M ;
- y est appelé l'ordonnée du point M .

On note les coordonnées des points en **ligne** : $M(x, y)$.

Exemple 10

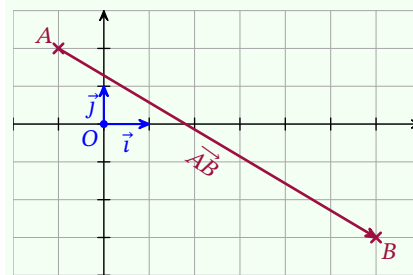


3.3.3 Coordonnées d'un vecteur et extrémités

Proposition 3.13 (Coordonnées d'un vecteur en fonction de ses extrémités, admise) — Dans un repère, si on considère deux points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$, alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées :

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}.$$

Exemple 11



3.3.4 Norme d'un vecteur

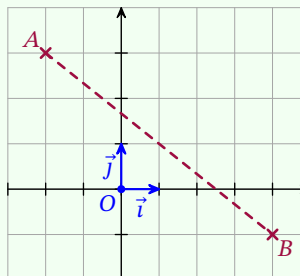
Proposition 3.14 (Norme d'un vecteur) — On considère un repère **orthonormé** du plan.

Si dans ce repère, on a $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, alors $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Proposition 3.15 — Si $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ alors :

$$\|\overrightarrow{AB}\| = AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

Exemple 12



IV Exercices

♦ **VEC.1** Chacune des figures ci-dessous peut être obtenue à partir d'une seule autre par un glissement selon deux directions à choisir parmi Nord, Sud, Est et Ouest. Compléter le tableau à l'aide des figures :

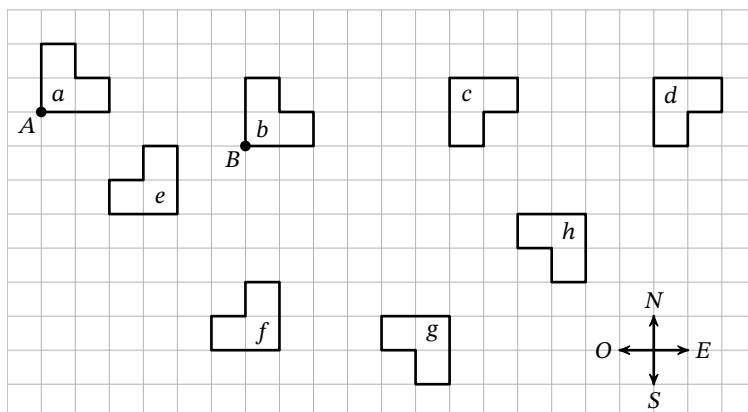
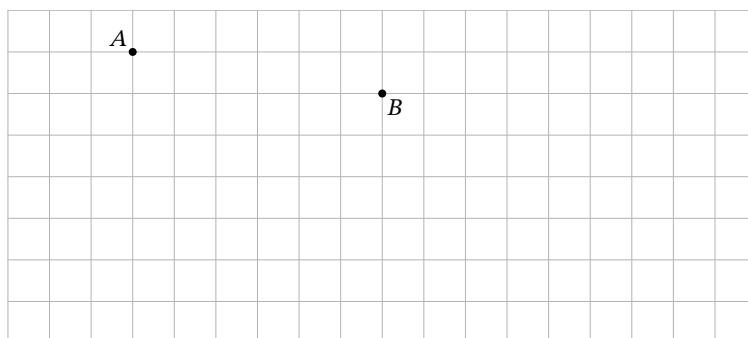


Figure	Figure obtenue par glissement	Déplacement
<i>a</i>		$(6E; 1S)$
<i>b</i>		
<i>c</i>		
<i>d</i>		
<i>e</i>		
<i>f</i>		
<i>g</i>		
<i>h</i>		

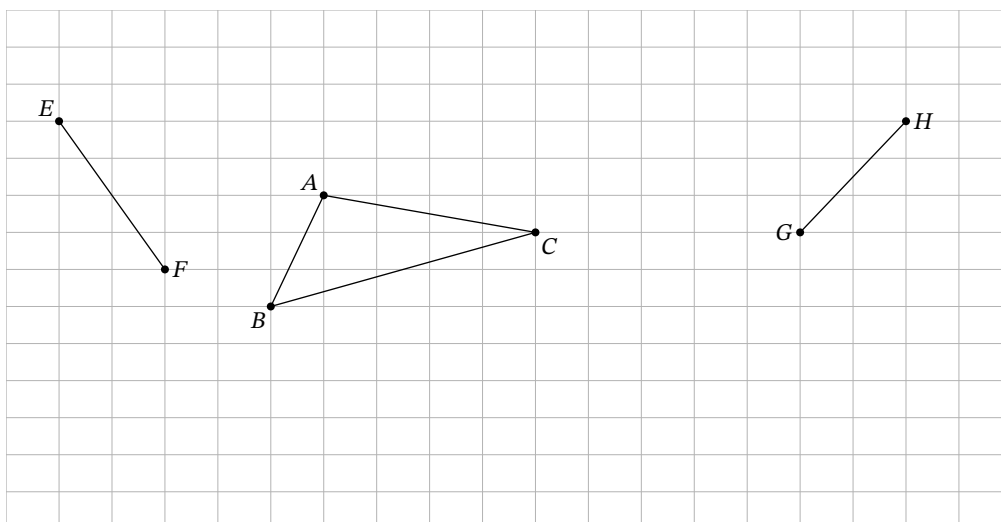
♦ **VEC.2** On considère la figure ci-dessous :

- 1) Placer l'image A' de A obtenue en déplaçant A de 2 carreaux vers la droite, puis de 5 carreaux vers le bas, puis faire subir à B les mêmes déplacements. On notera B' le point obtenu.
- 2) Tracer le quadrilatère $AA'B'B$. Que peut-on dire de ce quadrilatère? Que dire de ses diagonales $[A'B]$ et $[AB']$?



Définition 1 — On dit que A' est associé à A et que B' est associé à B par une même translation. On dit aussi que A' est l'image de A par cette translation.

♦ **VEC.3** On considère la figure ci-dessous :



- 1) On désigne par t la translation transformant E en F .
- a) Placer les points A' , B' et C' images respectives des points A , B et C par la translation t .
- b) Tracer une flèche rouge allant de E vers F .
Faire de même pour A et A' , B et B' puis C et C' .

Définition 2 — Les quatre « segments fléchés » ainsi définis correspondent aux mêmes déplacements. On dit qu'ils représentent le même **vecteur** et on écrit :

$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'}.$$

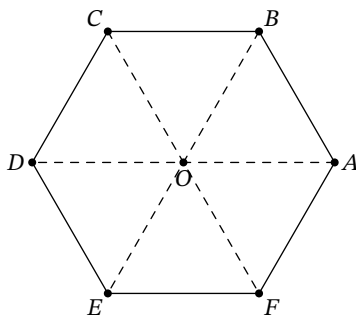
$\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$, $\overrightarrow{CC'}$ sont appelés **représentants** d'un même vecteur.

Le point de départ de chacun des vecteurs est appelé **origine** et le point d'arrivée est appelé **extrémité** du vecteur.

- 2) Placer sur la figure deux représentants du vecteur $\overrightarrow{AB}$: l'un est d'origine A' et l'autre d'extrémité C .

Premières notions

- ♦ **VEC.4** On considère l'hexagone régulier ci-dessous :



- 1) Déterminer le plus possible de vecteurs égaux formés avec les points de la figure.

- 2) Les égalités suivantes sont-elles vraies ?

- a) $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{OB}$; $DC = OB$; $(DC) = (OB)$.
b) $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{FE}$; $AF = FE$; $(AF) = (FE)$.
c) $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OD}$; $OA = OD$; $(OA) = (OD)$.
d) $\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{EO}$; $EB = EO$; $(EB) = (EO)$.

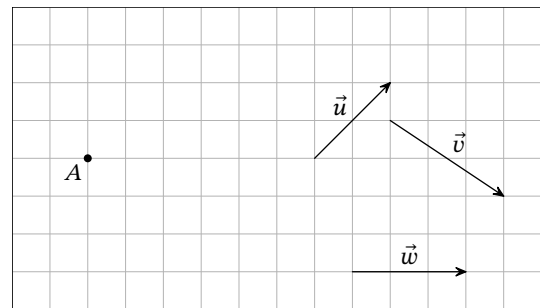
- ♦ **VEC.5** Soient $ABCD$ et $ABEF$ deux parallélogrammes.

- 1) Donner tous les vecteurs égaux au vecteur $\overrightarrow{AB}$.
2) Démontrer que $CDFE$ est un parallélogramme.

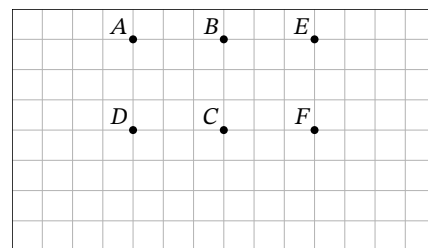
- ♦ **VEC.6** Soit MAK un triangle équilatéral.

- 1) a) Construire le point N , image de K par la translation de vecteur $\overrightarrow{AM}$.
b) Quelle est la nature du quadrilatère $AMNK$? Justifier.
2) a) Construire le point S , symétrique de M par rapport à K .
b) Construire le point O tel que K soit le milieu de $[AO]$.
c) Démontrer que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{SO}$.

- ♦ **VEC.7** Construire un représentant d'origine A pour chacun des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$:



- ♦ **VEC.8** On considère la figure ci-dessous :



- 1) Indiquer deux vecteurs égaux à $\overrightarrow{AB}$ puis un vecteur égal à $\overrightarrow{AC}$.

- 2) Construire les points M , N , P et Q tels que :

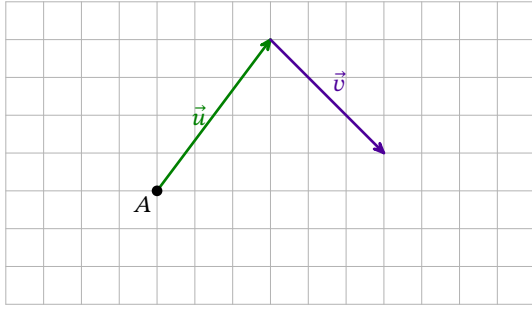
$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BD} \quad \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{AF} \quad \overrightarrow{CP} = \overrightarrow{ED} \quad \overrightarrow{FQ} = \overrightarrow{EC}.$$

- 3) Quelle est l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{DC}$? de vecteur $\overrightarrow{BF}$?
4) Quelle est l'image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{EA}$? de vecteur $\overrightarrow{CD}$?

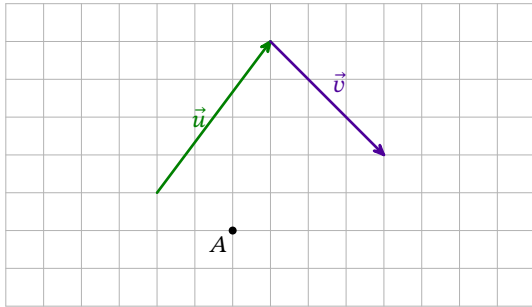
Sommes

- ♦ **VEC.9** Dans chacun des cas ci-dessous, construire le vecteur d'origine A égal à la somme $\vec{u} + \vec{v}$.

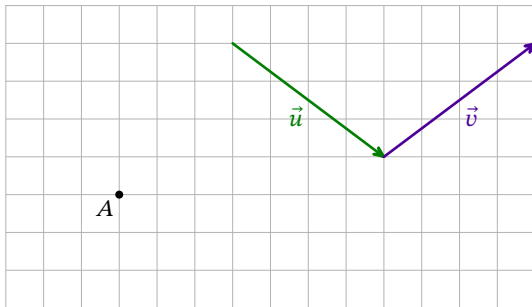
1)



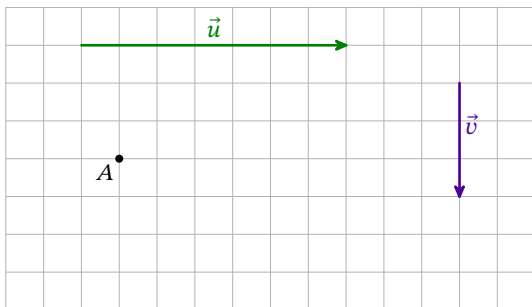
2)



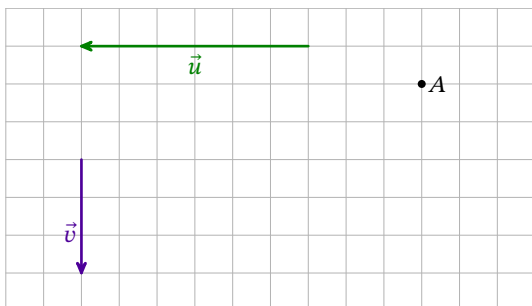
3)



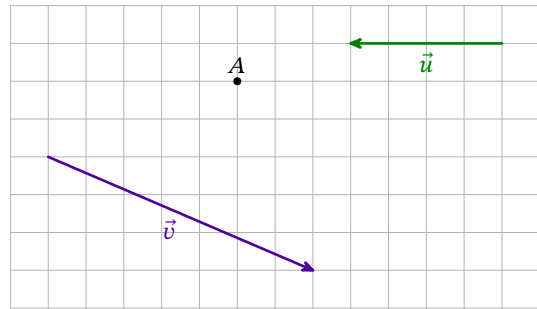
4)



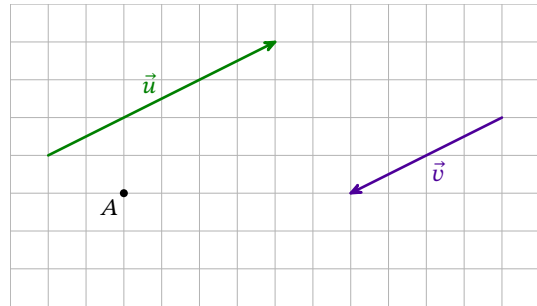
5)



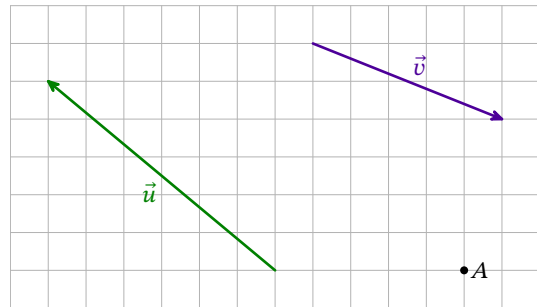
6)



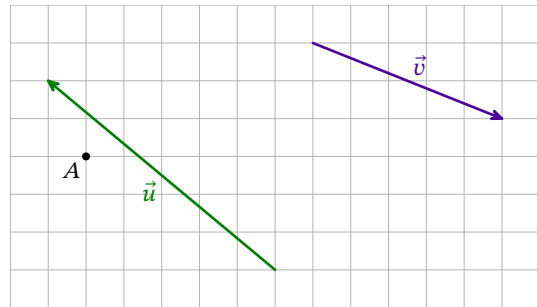
7)



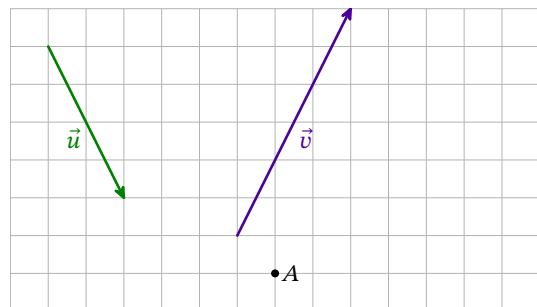
8)



9)



10)



♦ **VEC.10** Dans la figure de l'exercice 4, on pose $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$.

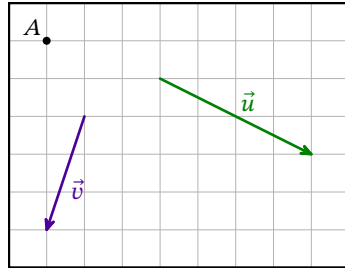
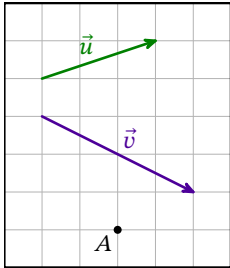
Exprimer, en utilisant uniquement les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, les

vecteurs suivants :

$$\overrightarrow{AO}; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{EA}; \overrightarrow{OF}; \overrightarrow{ED}; \overrightarrow{DF}.$$

Relation de Chasles, calculs

♦ **VEC.11** Dans chacun des cas, reproduire la figure et construire le vecteur d'origine A égal à $3\vec{u} + 2\vec{v}$.



♦ **VEC.12** En utilisant la relation de Chasles, écrire le plus simplement possible :

$$\vec{u} = \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB}; \quad \vec{v} = \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC};$$

$$\vec{w} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DB};$$

$$\vec{x} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA};$$

$$\vec{y} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{EF} - \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{ED}.$$

♦ **VEC.13** A, B, C et D sont quatre points du plan. Démontrer que :

$$1) \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} - (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CA}) = \overrightarrow{DA}$$

$$2) \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$$

♦ **VEC.14** O et A sont deux points distincts.

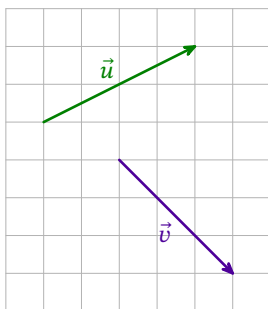
1) Placer les points M, N et P tels que :

$$\overrightarrow{OM} = 2\overrightarrow{OA}; \quad \overrightarrow{ON} = -3,5\overrightarrow{OA}; \quad \overrightarrow{OP} = -7\overrightarrow{OA}.$$

2) a) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}$ en fonction de $\overrightarrow{OA}$.

b) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{OP}$ en fonction de $\overrightarrow{ON}$.

♦ **VEC.15** On dispose de la figure ci-dessous :



1) Reproduire cette figure et placer un point A .

2) Placer les points B et C tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$.

3) Placer le point D tel que $\overrightarrow{CD} = -\vec{u}$.

4) Placer les points E, F, G, H et I tels que :

$$\overrightarrow{AE} = 2\vec{u} + \vec{v}; \quad \overrightarrow{BF} = 2\vec{v} - \vec{u};$$

$$\overrightarrow{AG} = \frac{3}{2}\vec{u} + \frac{2}{3}\vec{v}; \quad \overrightarrow{BH} = -\frac{3}{2}\vec{u} + \frac{5}{3}\vec{v}; \quad \overrightarrow{EI} = -\frac{3}{2}\vec{u} - \frac{1}{3}\vec{v}.$$

♦ **VEC.16** Soit ABC un triangle. Placer les points D, E, F, G et H tels que :

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC}; \quad \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB};$$

$$\overrightarrow{BF} = 2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA}; \quad \overrightarrow{AG} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BE}; \quad \overrightarrow{CH} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB}.$$

♦ **VEC.17** A et B sont deux points distincts horizontalement de 3 carreaux. Placer les points M, N, P et Q tels que :

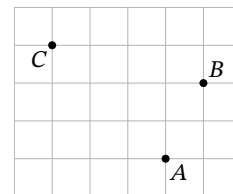
$$\overrightarrow{AM} = \frac{5}{2}\overrightarrow{AB}; \quad \overrightarrow{NA} = 3\overrightarrow{AB}; \quad \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{AB}; \quad \overrightarrow{BQ} = -2\overrightarrow{AQ}.$$

♦ **VEC.18** Soit ABC un triangle. Placer les points D, E, F et G tels que :

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}; \quad \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB};$$

$$\overrightarrow{FB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{BC}; \quad \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{BC}.$$

♦ **VEC.19** On dispose de la figure ci-dessous :



1) Reproduire cette figure puis placer les points M, N et P tels que :

$$\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}; \quad \overrightarrow{AN} = 2\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA};$$

$$\overrightarrow{BP} = -2\overrightarrow{BA} - \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}.$$

2) On pose $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$. Soit R le point tel que :

$$\overrightarrow{RA} - 4\overrightarrow{CB} = 3\overrightarrow{AC}.$$

a) À l'aide de la relation de Chasles, exprimer $\overrightarrow{AR}$ en fonction de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

b) Placer le point R .

3) a) Exprimer $\overrightarrow{MN}$ en fonction de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

b) En déduire la nature de $ARNM$.

♦ **VEC.20** Soit ABC un triangle. On considère les points D et E définis par :

$$\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{CE} = 3\overrightarrow{BA}$$

Démontrer que C est le milieu de $[DE]$.

♦ **VEC.21** ABC est un triangle. Les points M, N et P sont définis de la façon suivante :

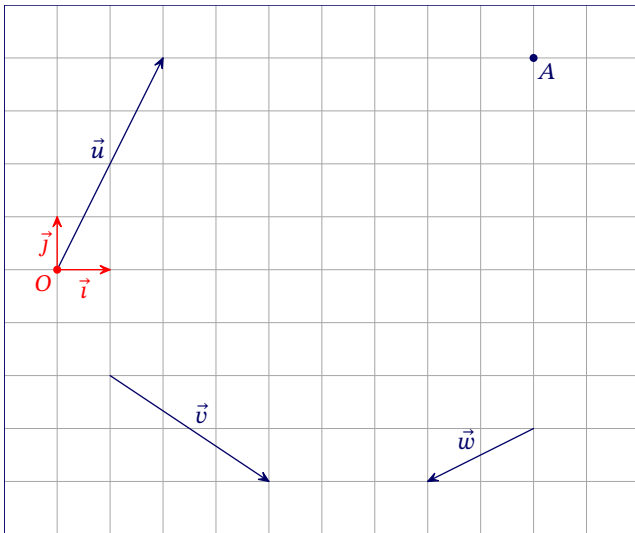
M est le symétrique de C par rapport à B , $\overrightarrow{AN} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{BP}$.

1) Faire une figure et placer M et N .

- 2) À l'aide de la relation de Chasles, exprimer $\overrightarrow{BP}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$. Placer le point P .
- 3) En transformant $\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{PN}$, démontrer que P est le milieu de $[MN]$.

Intro aux coordonnées

♦ **VEC.22** On considère la figure ci-dessous où le quadrillage est uniforme :



- 1) Compléter les pointillés par les nombres qui conviennent :

$$\vec{u} = \dots \vec{i} + \dots \vec{j};$$

$$\vec{v} = \dots \vec{i} + \dots \vec{j}.$$

On note $\vec{u} \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix}$.

- 2) Construire le représentant du vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ d'origine O et un représentant du vecteur $\vec{v} + 3\vec{w}$ d'origine A .
- 3) Compléter les pointillés par les nombres qui conviennent :

$$\vec{u} + \vec{v} = \dots \vec{i} + \dots \vec{j}.$$

$$3\vec{w} = \dots \vec{i} + \dots \vec{j}.$$

$$\vec{v} + 3\vec{w} = \dots \vec{i} + \dots \vec{j}.$$

- 4) Compléter les propriétés suivantes :

Si, dans une base $(\vec{i}, \vec{j})$, on a $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, alors

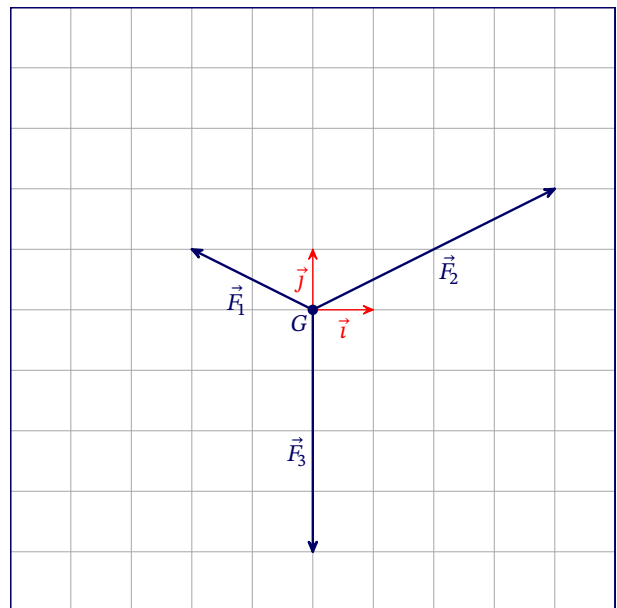
$$\vec{u} + \vec{v} \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix}.$$

Si, dans une base $(\vec{i}, \vec{j})$, on a $\lambda \in \mathbf{R}$ et $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, alors

$$\lambda \vec{u} \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix}.$$

- 5) Dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, les coordonnées du point A sont celles du vecteur $\overrightarrow{OA}$, on a : $A(\dots; \dots)$.
- 6) Quelles sont les coordonnées du point B tel que $\overrightarrow{OB} = 12\vec{u} - 5\vec{w} + 6\vec{v}$?
Compléter $B(\dots; \dots)$.
- 7) Quelles sont les coordonnées du point C tel que $\overrightarrow{AC} = \frac{1}{4}\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v}$?
Compléter $C(\dots; \dots)$.

♦ **VEC.23** En physique, on peut représenter les forces s'exerçant sur un solide par des vecteurs. Un système est équilibré (c'est-à-dire qu'il ne bouge plus par rapport au référentiel terrestre) lorsque la somme des forces qui s'exercent sur lui est nulle.



- 1) Écrire les coordonnées des vecteurs forces $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ et $\vec{F}_3$ relativement à la base $(\vec{i}, \vec{j})$:

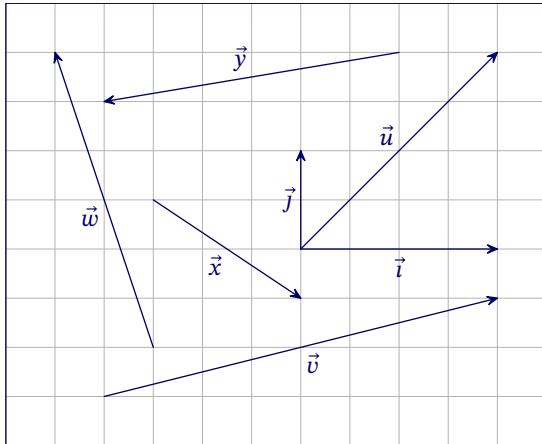
$$\vec{F}_1 \begin{pmatrix} \quad \quad \end{pmatrix} \quad \vec{F}_2 \begin{pmatrix} \quad \quad \end{pmatrix} \quad \vec{F}_3 \begin{pmatrix} \quad \quad \end{pmatrix}$$

- 2) Déterminer si le système représenté par le solide assimilé à un point G et les trois forces s'exerçant sur lui $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ et $\vec{F}_3$ est à l'équilibre.
- 3) On suppose que l'on peut modifier la valeur de la force $\vec{F}_1$, c'est-à-dire la norme du vecteur $\vec{F}_1$, mais pas sa direction. Peut-on faire en sorte que le système soit à l'équilibre?

Coordonnées

♦ **VEC.24** On donne la figure ci-dessous.

- Exprimer les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{x}$ et $\vec{y}$ en fonction de $\vec{i}$ et $\vec{j}$.
- Donner les coordonnées dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ de chacun de ces vecteurs.



♦ **VEC.25** Tracer deux vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

Tracer un représentant de chacun des vecteurs suivants dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$:

$$\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad \vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}; \quad \vec{w} \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{7}{4} \end{pmatrix}; \quad \vec{x} \begin{pmatrix} -2 \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

♦ **VEC.26** On considère les vecteurs $\vec{a} \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{b} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$,

$$\vec{c} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{d} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ et une base } (\vec{i}, \vec{j}).$$

Déterminer les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{x}$ et $\vec{y}$ définis par :

$$\vec{u} = -3\vec{a}; \quad \vec{v} = \vec{b} + \vec{c}; \quad \vec{w} = 2\vec{c} + 3\vec{d};$$

$$\vec{x} = 2\vec{a} - 4\vec{b}; \quad \vec{y} = -\frac{3}{2}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{d}.$$

Dans les exercices suivants, on se place dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

♦ **VEC.27** On considère les points $A(2; 3)$, $B(1; -2)$, $C(-3; -3)$ et $D(0; 2)$.

- Calculer les coordonnées des vecteurs

$$\vec{AB}, \quad \vec{AC}, \quad \vec{BC} \quad \text{et} \quad \vec{DC}.$$

- Calculer les coordonnées des vecteurs

$$\vec{AB} + \vec{AC}, \quad 2\vec{BC} - \vec{DC} \quad \text{et} \quad 3\vec{AB} + 2\vec{BD}.$$

♦ **VEC.28** Le quadrilatère $ABCD$ est-il un parallélogramme?

$$1) A(-1; 3); B(-3; -2); C(1; -1); D(3; 4).$$

$$2) A(-3; 2); B(3; 0); C(2; -4); D(-5; -2).$$

♦ **VEC.29** On considère les points $A(2; 1)$, $B(-2; 3)$ et $C(-1; -1)$. Déterminer les coordonnées du point M tel que :

$$\vec{BM} = \vec{CA} + \vec{BA}.$$

♦ **VEC.30** On considère les points $A(-3; 4)$ et $I(2; -4)$. Déterminer les coordonnées de B tel que I soit le milieu de $[AB]$.

♦ **VEC.31** On considère les points $A(2; 1)$, $B(1; -1)$ et $C(5; 0)$.

- Calculer les coordonnées de D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.
- Calculer les coordonnées de E , le symétrique de C par rapport à A .

♦ **VEC.32** On considère les points A , B et C de coordonnées $A(-2; 2)$, $B(1; 3)$, $C(\frac{1}{2}; 0)$.

Calculer les coordonnées du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.

♦ **VEC.33** On considère les points $A(-2; 2)$, $B(5; 6)$, $C(4; -1)$ et J le milieu de $[AC]$.

- Placer les points dans le repère.
- Déterminer les coordonnées de M tel que :

$$\vec{MC} = \frac{1}{3}\vec{AC}.$$

- Déterminer les coordonnées de D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.
- Déterminer les coordonnées de N tel que :

$$\vec{JN} = 3\vec{JM}.$$

- Déterminer les coordonnées de P tel que :

$$\vec{PA} + 3\vec{PB} = \vec{0}.$$

- Déterminer les coordonnées de R tel que :

$$3\vec{RA} - 2\vec{RB} - \vec{RC} = 2\vec{AB}.$$