♦ **SED.1** Résoudre dans **R** l'inéquation suivante :

$$\frac{-x^2+10x-25}{-5x^2-20x+105} \geqslant 0.$$

☞ **Correction exercice 1 :** On étudie le signe du numérateur et du dénominateur (voir fiche sur le second degré) :

x	$-\infty$		-7		3		5		$+\infty$
$-x^2+10x-25$		$-$		$-$		$-$	0	$-$	
$-5x^2-20x+105$		$-$	0	$+$	0	$-$		$-$	
$\frac{-x^2+10x-25}{-5x^2-20x+105}$		$+$	‖	$-$	‖	$+$	0	$+$	

Et finalement $\boxed{\mathcal{S} =]-\infty;-7[\cup]3;+\infty[}$.

♦ **SED.2** Résoudre dans **R** l'équation suivante :

$$x^4 - 2x^2 - 2 = 0.$$

☞ **Correction exercice 2 :** On pose $X = x^2$, l'équation devient

$$X^2 - 2X - 2 = 0.$$

Les racines de cette équation sont $1 \pm \sqrt{3}$.

Or $X = x^2$ donc seule la racine positive de l'équation que vérifie X nous intéresse : il s'agit de $1+\sqrt{3}$.

$$x^2 = -1+\sqrt{3} \iff \begin{cases} x = \sqrt{1+\sqrt{3}} \\ \text{ou} \\ x = -\sqrt{1+\sqrt{3}} \end{cases}$$

Ainsi, $\boxed{\mathcal{S} = \left\{\sqrt{1+\sqrt{3}}; -\sqrt{1+\sqrt{3}}\right\}}$.

Remarque 1 Au fait, pourquoi est-ce que $1-\sqrt{3}$ est négatif?... On peut le voir simplement car : $1^2 = 1$ et $\sqrt{3}^2 = 3$ donc $1 < \sqrt{3}$.

♦ **SED.3** Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant.

1) On considère une fonction du second degré $f : x \mapsto ax^2+bx+c$ où $a \neq 0$ et $b \neq 0$.

« Si a et c sont de signes opposés, alors f possède deux racines distinctes. »

☞ **Correction exercice 3 :** Si a et c dont de signes opposés, $b^2 - 4\underbrace{ac}_{\leqslant 0}$ est positif, et même strictement positif car $b \neq 0$ donc $b > 0$. Ainsi, l'affirmation est vraie.

2) On considère un trinôme ax^2+bx+c et son discriminant Δ.

« Si $\Delta < 0$ alors pour tout réel x, $\quad ax^2+bx+c < 0$. »

☞ **Correction exercice 3 :** L'affirmation est trivialement fausse : il suffit de considérer x^2+1.

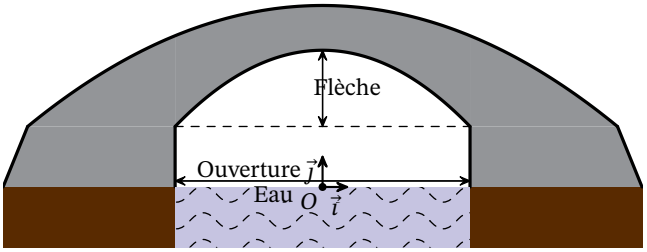
3) On considère une fonction du second degré $f : x \mapsto ax^2+bx+c$ où $a \neq 0$, et on note $\alpha = -\frac{b}{2a}$.

« Si f possède deux racines positives alors α est positif. »

☞ **Correction exercice 3 :** L'affirmation est vraie : on peut le montrer car α est le milieu des racines !

♦ **SED.4** Les principaux éléments de l'Airbus A380 sont transportés sur des barges naviguant sur la Garonne jusqu'aux usines de Toulouse où ils sont assemblés. La barge *Le Breuil* passe alors sous le pont de Pierre à Bordeaux.

La barge a pour largeur 14 mètres et passe à marée basse sous la 9e arche. La partie parabolique de cette arche possède une flèche de 6 mètres. Les piliers qui soutiennent la partie parabolique sont à découvert sur 4 mètres à marée basse. L'ouverture de la 9e arche est de 20 mètres.



1) Déterminer l'équation de la partie parabolique de l'arche, en se plaçant dans le repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ placé sur la figure (O étant au centre de l'ouverture) et où l'unité choisie est le mètre.

☞ **Correction exercice 4 :** La parabole passe par $A(-10,4)$, $B(0,10)$ et $C(10,4)$. La courbe étant paire par construction, l'expression de la fonction f sera de la forme

$$f(x) = 10 - ax^2.$$

De plus, $f(10) = 4$ donc $10 - 100a = 4$ soit $a = \frac{6}{100}$. Finalement :

$$f(x) = 10 - \frac{3}{50}x^2.$$

2) Des éléments de l'avion sont entreposés dans un conteneur de forme parallélépipédique de largeur 14 mètres posé au fond de la barge, fond que l'on suppose se trouver au niveau de l'eau. Sachant qu'on laisse une marge de sécurité de 50 cm, quelle doit être la hauteur maximale du conteneur pour passer sous l'arche sans encombre ?

☞ **Correction exercice 4 :** La hauteur maximale est égale à $f(7) - 0{,}5$ mètres, donc 6,56 mètres.

3) Un article du journal *Sud-Ouest* indique que des éléments du fuselage de l'A380 mesurant 8 mètres de haut franchissent le pont de Pierre. Sachant qu'on suppose que le bateau passe au centre de l'arche et qu'on laisse une

marge de sécurité de 50 cm, quelle est la largeur maximale de ces éléments ?

☞ **Correction exercice 4 :** On doit résoudre $f(x) = 8{,}5$: on obtient $x = \pm 5$, donc la largeur maximale des éléments est de 10 mètres.

♦ **SED.5** Au fond d'un canyon coule une rivière. Du bord du surplomb rocheux, on laisse tomber une pierre et on chronomètre le temps écoulé entre le lâcher de la pierre et l'instant du « plouf » dans la rivière : il s'écoule 4,5 secondes.

L'objectif est de déterminer la profondeur p du canyon (en mètres). On doit pour cela envisager le temps mis par la pierre pour tomber et le temps mis par le « plouf » pour remonter jusqu'à notre oreille.

On donne les informations suivantes :

- La distance (en mètres) parcourue par un objet qui tombe dans l'atmosphère est donnée en fonction du temps (en secondes) par la formule $d = \frac{1}{2}gt^2$ (on prendra $g = 10\ m/s^2$).
- La vitesse du son dans l'atmosphère est 340 m/s.

1) On appelle t_1 le temps de chute de la pierre et t_2 le temps de remontée du son depuis la rivière. Justifier chacune des égalités du système suivant :

$$\begin{cases} t_1 + t_2 &= 4{,}5 \\ 340t_2 &= p \\ 5t_1^2 &= p \end{cases}$$

☞ **Correction exercice 5 :**

- La première égalité provient du fait que le temps écoulé est de 4,5 secondes ;
- la seconde égalité provient du fait que la distance parcourue par le son en remontée est de p mètres ;
- la dernière égalité traduit le fait que l'objet est tombé de p mètres.

2) En déduire la valeur de t_1 puis la profondeur du canyon.

On arrondira t_1 au centième de seconde et la profondeur p au mètres près.

☞ **Correction exercice 5 :** On a : $5t_1^2 = 340(4{,}5 - t_1)$ donc $t_1 = -34 + \sqrt{1462}$ secondes, soit environ 4,24 secondes.

p est égal à $5t_1^2$ soit $13090 - 340\sqrt{1462} \approx 90$ mètres.

♦ **SED.6** Soit m un nombre réel. On considère le trinôme T de variable x, défini par

$$T(x) = 4x^2 - 8mx + m^2 + 1.$$

1) Justifier que T possède un minimum.

☞ **Correction exercice 6 :** T possède un minimum puisque $4 > 0$.

2) Pour quelles valeurs de m ce minimum est-il égal à -11 ?

☞ **Correction exercice 6 :** La valeur du minimum de T est $T\left(\frac{8m}{8}\right)$ soit :

$$\begin{aligned} T(m) &= 4m^2 - 8m^2 + m^2 + 1 \\ &= -3m^2 + 1 \end{aligned}$$

On résout donc $-3m^2 + 1 = -11$: ce qui nous donne $m \in \{-2; 2\}$.

♦ **SED.7** On considère la courbe $\mathcal{C}$ de la fonction inverse, et le point $I\left(\frac{9}{4}; \frac{9}{8}\right)$. Déterminer deux points A et B appartenant à $\mathcal{C}$ tels que I soit le milieu de $[AB]$.

☞ **Correction exercice 7 :** Si A et B appartiennent à la courbe $\mathcal{C}$, alors $y_A = \frac{1}{x_A}$ et $y_B = \frac{1}{x_B}$. De plus,

$$\begin{cases} \frac{9}{4} = \frac{x_A + x_B}{2} \\ \frac{9}{8} = \frac{y_A + y_B}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{9}{4} = \frac{x_A + x_B}{2} \\ \frac{9}{8} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x_A} + \frac{1}{x_B}\right) \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{9}{4} = \frac{x_A + x_B}{2} \\ \frac{9}{8} = \frac{9}{4x_Ax_B} \end{cases}$$

Ainsi,

$$\begin{cases} x_Ax_B = 2 \\ x_A + x_B = \frac{9}{2} \end{cases}$$

Donc x_A et x_B sont les racines de l'équation $x^2 - \frac{9}{2}x + 2 = 0$, donc $\frac{1}{2}$ et 4. Ainsi :

$$A\left(\frac{1}{2}; 2\right) \quad \text{et} \quad B\left(4; \frac{1}{4}\right).$$