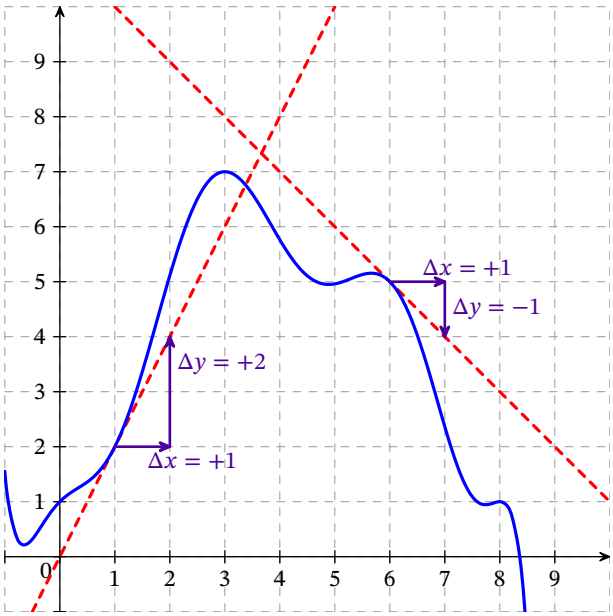
♦ **DL.1** On se donne la courbe d'une fonction f ci-dessous et deux tangentes :



1) Donner graphiquement les valeurs de $f(1)$, $f(6)$, $f'(1)$ et $f'(6)$.

2) Donner les équations des tangentes à la courbe de f en 1 et en 6.

☞ **Correction exercice 1 :**

1) $f(1) = 2$, $f(6) = 5$, $f'(1) = 2$, $f'(6) = -1$.

2) En 1 : $y = 2x$, en 6 : $y = 11 - x$.

♦ **DL.2** On se donne f telle que pour tout réel x, $f(x) = 2x^2 + x - 5$.

1) Si $h \neq 0$, calculer $\dfrac{f(2+h) - f(2)}{h}$.

2) En déduire que f est dérivable en 2 et calculer $f'(2)$.

☞ **Correction exercice 2 :**

1)

$$\begin{aligned}\frac{f(2+h) - f(2)}{h} &= \frac{2(2+h)^2 + 2 + h - 5 - 5}{h} \\ &= \frac{2h^2 + 9h}{h} \\ &= 2h + 9.\end{aligned}$$

2) $\lim\limits_{h\to 0} 2h + 9 = 9$ donc f est dérivable en 2 et $f'(2) = 9$.

♦ **DL.3** On se donne g définie sur $[0; +\infty[$ telle que $g(x) = 5\sqrt{x} - \dfrac{x}{4}$. Calculer (là où g est dérivable) $g'(x)$ en fonction de x (on réduira l'expression au même dénominateur).

☞ **Correction exercice 3 :** g est dérivable sur $]0; +\infty[$ (on exclut zéro à cause de $\sqrt{x}$).

Pour tout réel x strictement positif, on a :

$$\begin{aligned}g'(x) &= \frac{5}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{4} \\ &= \frac{10 - \sqrt{x}}{4\sqrt{x}}\end{aligned}$$

♦ **DL.4** On se donne h définie sur $]0; +\infty[$ par

$$h(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x - \frac{1}{x}.$$

Déterminer les points où la tangente à la courbe de h est horizontale.

☞ **Indications exercice 4 :** on pourra remarquer que $x^3 - 2x^2 + 1$ est factorisable par $x - 1$.

☞ **Correction exercice 4 :** On calcule la dérivée de h, puisque h est dérivable sur $\mathbf{R}^*$:

$$\forall x \in \mathbf{R}^*, \quad h'(x) = x - 2 + \frac{1}{x^2}.$$

On résout ensuite l'équation $h'(x) = 0$:

$$\begin{aligned}& x - 2 + \frac{1}{x^2} = 0 \\ \iff \quad & \frac{x^3 - 2x^2 + 1}{x^2} = 0 \\ \iff \quad & x^3 - 2x^2 + 1 = 0 \\ \iff \quad & (x-1)(x^2 - x - 1) = 0\end{aligned}$$

On obtient alors 3 solutions : 1, $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Ce sont les points où la tangente à la courbe de h est horizontale.

♦ **DL.5** Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{-x^2 + 11x - 28}{2x - 6}.$$

1) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f.

2) Résoudre l'équation $f(x) = 0$. Interpréter graphiquement le résultat.

3) Calculer l'expression de la dérivée $f'(x)$ et préciser son domaine de validité.

4) Étudier le signe de $d(x)$ défini par :

$$d(x) = f(x) - \left(-\frac{1}{2}x + 4\right).$$

Interpréter graphiquement le résultat.

☞ **Correction exercice 5 :**

1) $\mathcal{D}_f = \mathbf{R} \setminus \{3\}$.

2) Les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sont les abscisses où la courbe de f coupe l'axe des abscisses. Ici, ce sont 7 et 4.

3) f est dérivable sur $\mathbf{R} \setminus \{3\}$ et pour tout x dans cet ensemble,

$$f'(x) = \frac{-4x^2 + 12x - 10}{(2x-6)^2}.$$

4) Étudier le signe de $d(x)$ défini par :

$$d(x) = f(x) - \left(-\frac{1}{2}x + 4\right).$$

Interpréter graphiquement le résultat.

$$\begin{aligned} d(x) &= f(x) - \left(-\frac{1}{2}x + 4\right) \\ &= \frac{-x^2 + 11x - 28}{2x - 6} - \left(-\frac{1}{2}x + 4\right) \\ &= \frac{-x^2 + 11x - 28 + (1/2x - 4)(2x - 6)}{2x - 6} \\ &= \frac{-24}{2x - 6} \end{aligned}$$

Le signe de d est donc l'opposé du signe de $2x - 6$: ainsi d est positive sur $]-\infty; 3]$ et négative sur $[3; +\infty[$:

x	$-\infty$		3		$+\infty$
Signe de $d(x)$		$+$	0	$-$	

Cela permet d'affirmer que la courbe de f est au-dessus de la droite d'équation $y = -\frac{1}{2}x + 4$ sur $]-\infty; 3]$ et en -dessous sur $[3; +\infty[$.

♦ DL.6

1) Donner le domaine de définition de la fonction f telle que $f(x) = x - \sqrt{6 - 5x}$.

2) On admet que f est dérivable uniquement sur $\left]-\infty; \frac{6}{5}\right[$.
Calculer l'expression dérivée $f'(x)$ sur cet ensemble (ne pas la mettre au même dénominateur).

3) Donner l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse $-\frac{3}{5}$.

4) ***Bonus*** On note f'' la dérivée de f'. Montrer que pour tout x du domaine de définition de f' on a : $f''(x) \geqslant 0$ (on demande seulement le calcul et pas la justification du fait que f' soit dérivable).

☞ **Correction exercice 6 :**

1) Le domaine de définition de f est $\left]-\infty; \frac{6}{5}\right]$.

2) On a :

$$f'(x) = 1 + \frac{5}{2\sqrt{6 - 5x}}.$$

3) $f\left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{3}{5} - 3 = -\frac{18}{5}$ et $f'\left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{11}{6}$, donc l'équation de la tangente à la courbe de f en $-\frac{3}{5}$ est :

$$\begin{aligned} y &= \frac{11}{6}\left(x + \frac{3}{5}\right) - \frac{18}{5} \\ &= \frac{11}{6}x - 5. \end{aligned}$$

4)

$$f''(x) = \frac{25}{4(6 - 5x)\sqrt{6 - 5x}}$$

Sur $\left]-\infty; \frac{6}{5}\right[$, cette expression est toujours positive, donc sur le domaine de définition de f, $f''(x) \geqslant 0$.

♦ DL.7

Soit g la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$g(x) = x(\sqrt{x} - 3) + 2.$$

1) Justifier que g est dérivable sur $]0; +\infty[$ puis démontrer que, pour tout $x \in]0; +\infty[$:

$$g'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x} - 3.$$

2) En utilisant le taux d'accroissement, démontrer que g est dérivable en 0 et calculer $g'(0)$.

3) Démontrer que, pour tout $x \in [0; +\infty[$:

$$g(x) = \left(\sqrt{x} - 1\right)\left(x - 2\sqrt{x} - 2\right).$$

4) ***Bonus*** Montrer que l'équation $x - 2\sqrt{x} - 2 = 0$ admet une unique solution : $2\sqrt{3} + 4$.

5) En déduire les solutions de l'équation $g(x) = 0$.

☞ **Correction exercice 7 :**

1) g est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme produit de fonctions dérivables sur cet intervalle et :

$$\forall x \in \mathbf{R}^{+*}, \quad g'(x) = \sqrt{x} - 3 + x\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = \frac{3}{2}\sqrt{x} - 3.$$

2) Soit $h < 0$.

$$\begin{aligned} \frac{g(h) - g(0)}{h} &= \frac{h\sqrt{h} - 3h + 2 - 2}{h} \\ &= \sqrt{h} - 3 \end{aligned}$$

Donc $\lim\limits_{h \to 0} \frac{g(h) - g(0)}{h} = -3$. Ainsi, g est dérivable en 0 et $g'(0) = -3$.

3) Il suffit de développer l'expression donnée.

4) Pour cette question, il suffit de poser $u = \sqrt{x}$, cela nous donne donc comme équation

$$u^2 - 2u - 2 = 0.$$

On trouve $u = 1 \pm \sqrt{3}$, or u doit être positif donc il n'y a qu'une seule solution pour u : $u = 1 + \sqrt{3}$. On revient à x : $x = \left(1 + \sqrt{3}\right)^2$.

5) Les solutions de cette équation sont donc $x = 1$ et $x = \left(1 + \sqrt{3}\right)^2$.