♦ **DG.1** Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{2x^2 + 3x - 9}{x^2 - 2}.$$

Étudier complètement la fonction f :

- Ensemble de définition
- Variations
- Intersection avec l'axe des abscisses
- Tangentes (par exemple celle au point d'abscisse 0)
- Courbe
- ...

☞ **Correction exercice 1 :** f définie et dérivable sur $\mathbf{R} \setminus \left\{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right\}$ comme quotient de polynômes dont le dénominateur ne s'annule pas sur cet ensemble. Et $\forall x \in \mathbf{R} \setminus \left\{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right\}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(4x+3)(x^2-2) - (2x^2+3x-9)(2x)}{(x^2-2)^2} \\ &= \frac{-3x^2 + 10x - 6}{(x^2-2)^2}. \end{aligned}$$

Le dénominateur étant toujours positif sur l'ensemble $\mathbf{R} \setminus \left\{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right\}$, le signe de $f'(x)$ est le signe de $-3x^2 + 10x - 6$. On détermine celui-ci en calculant les racines de ce trinôme du second degré :

$$\begin{aligned} \Delta &= 10^2 - 4 \times 3 \times 6 \\ &= 28 \end{aligned}$$

Les racines sont donc $\frac{-10 \pm \sqrt{28}}{-6} = \frac{5 \pm \sqrt{7}}{3}$. On obtient ce tableau (attention aux valeurs interdites et à l'ordre des valeurs - voir plus loin) :

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		$\frac{5-\sqrt{7}}{3}$		$\sqrt{2}$		$\frac{5+\sqrt{7}}{3}$		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	
Variations de f		↘	‖	↘		↗	‖	↗		↘	

Remarque 1 Le chapitre 3 sur les limites de fonctions permettra de compléter ce tableau complètement.

On pense BIEN à tracer la courbe sur sa calculatrice pour vérifier qu'on ne s'est pas trompé dans les calculs !! Et vous allez me dire, mais comment savoir que $-\sqrt{2}$, $\frac{5-\sqrt{7}}{3}$, $\sqrt{2}$, $\frac{5+\sqrt{7}}{3}$ sont rangés dans cet ordre ?? Ceux qui répondent "on prend la calculatrice" savent où ils finissent...

D'abord, $-\sqrt{2}$ est la seule valeur négative car $5 > \sqrt{7}$ (puisque $25 > 7$, et que 5 et 7 sont positifs).

Ensuite, de façon évidente, $\frac{5-\sqrt{7}}{3} < \frac{5+\sqrt{7}}{3}$.

Il reste à savoir où $\sqrt{2}$ se situe par rapport à $\frac{5-\sqrt{7}}{3}$ et $\frac{5+\sqrt{7}}{3}$. Pour cela, on peut être un peu astucieux :

- $\sqrt{7} > 2$ donc $5 - \sqrt{7} < 3$ et donc $\frac{5-\sqrt{7}}{3} < 1 < \sqrt{2}$;
- $\frac{5+\sqrt{7}}{3} > \frac{7}{3} > 2 > \sqrt{2}$.

Et voilà ! Conclusion : $-\sqrt{2} < \frac{5-\sqrt{7}}{3} < \sqrt{2} < \frac{5+\sqrt{7}}{3}$.

Pour l'intersection avec l'axe des abscisses, on résout l'équation $f(x) = 0$:

$$\begin{aligned} & f(x) = 0 \\ \iff & \frac{2x^2+3x-9}{x^2-2} = 0 \\ \iff & 2x^2+3x-9 = 0 \end{aligned}$$

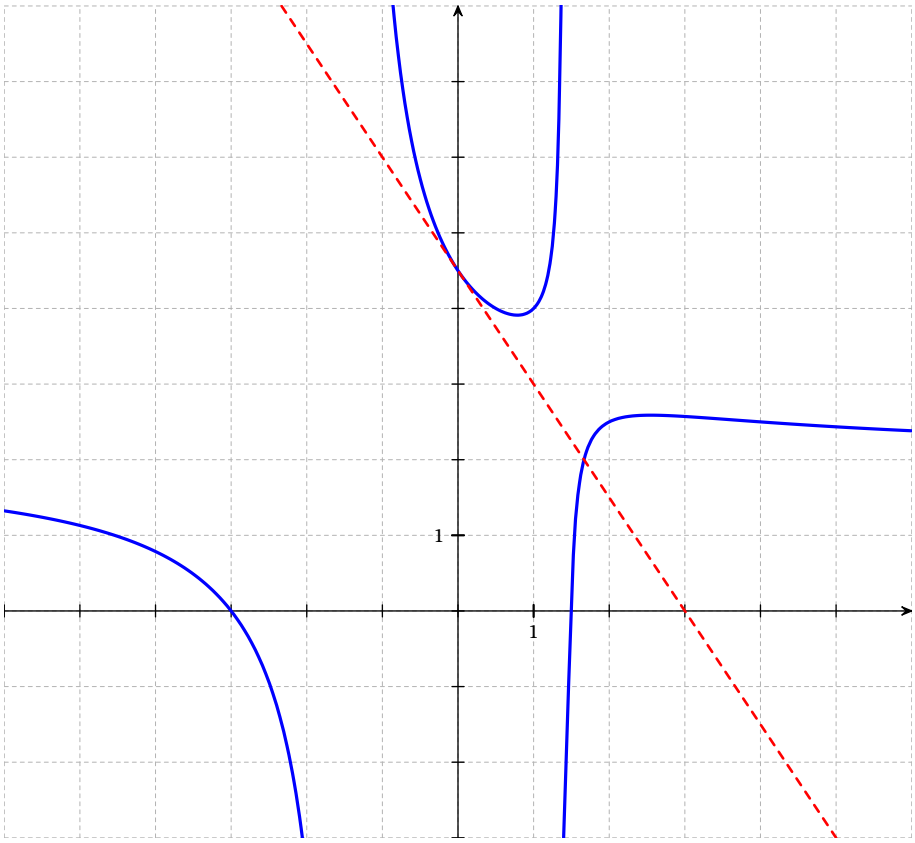
Donc discriminant etc... On obtient $x = \frac{-3 \pm \sqrt{81}}{4}$ soit $x = \frac{3}{2}$ ou $x = -3$.

Conclusion : la courbe de f coupe l'axe des abscisses en $(-3;0)$ et en $\left(\frac{3}{2};0\right)$.

Pour la tangente en zéro, on utilise l'équation rappelée dans la fiche "Continuité, dérivabilité" : $y = f'(0)x + f(0)$. Ici, $f'(0) = -\frac{3}{2}$ et $f(0) = \frac{9}{2}$ donc cette tangente a pour équation :

$$y = -\frac{3}{2}x + \frac{9}{2}.$$

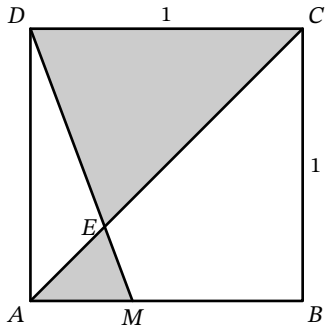
Allez, une petite courbe après tous ces efforts (avec la tangente en zéro en rouge) :



♦ **DG.2** On considère un carré $ABCD$ de côté 1 et M un point mobile sur le segment $[AB]$.

Les droites (DM) et (AC) se coupent en un point E.

Déterminer l'aire colorée minimale ainsi que la ou les positions du point M rendant cette aire minimale.

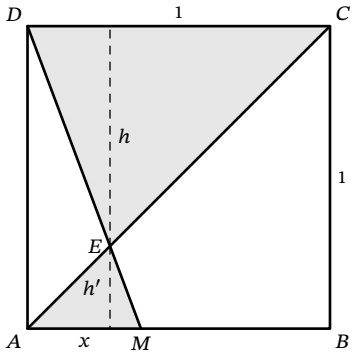


☞ **Correction exercice 2 :** On pose dans un grand élan d'originalité $AM = x$ où $x \in [0,1]$.

Il y a plusieurs façons d'obtenir l'expression de l'aire colorée en fonction de x :

- On peut calculer, dans le repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$ les équations des droites (AC) et (DM), puis les coordonnées du point E (comme intersection de (AC) et (DM)).
- Ou plus géométriquement, les triangles DCE et AEM sont semblables (par leurs angles alternes-internes, étant donné que (DC) et (AB) sont parallèles), et de rapport de longueurs ("petit sur grand") $\frac{x}{1} = x$.

Procédons avec la deuxième méthode, plus élégante : soit h la hauteur du triangle DEC issue de E et h' la hauteur du triangle AEM issue de E :



On a $h' = xh$ (propriété des triangles semblables) donc $(1+x)h = 1$ soit $h = \frac{1}{1+x}$.

L'aire de la partie grisée est donc : $f(x) := \frac{xh' + h}{2} = \frac{(1+x^2)h}{2} = \frac{1+x^2}{2(1+x)}$.

Il ne reste plus qu'à étudier $f(x)$ (qui est dérivable sur $[0;1]$ sans problème) : $\forall x \in [0;1]$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x(2+2x) - (1+x^2)2}{(2+2x)^2} \\ &= \frac{2x^2 + 4x - 2}{(2+2x)^2}. \end{aligned}$$

Ce qui nous donne (calculs, calculs) :

x	0		$-1+\sqrt{2}$		1
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f		↘		↗	

f admet donc bien un minimum pour $x = \sqrt{2} - 1$ qui vaut (calculs, calculs) $\sqrt{2} - 1$.

♦ **DG.3** Soit g la fonction définie par :

$$g(x) = \sqrt{x - x^2}.$$

Déterminer le domaine de définition de g, puis son domaine de dérivabilité.

☞ **Correction exercice 3 :** Bon, on regarde ce qu'il y a dans la racine et on voit quoi ? Du second degré, avec 0 et 1 comme racines. g est définie sur $[0,1]$ et dérivable sur $]0,1[$.

Ici, si vous êtes consciencieux, vous vous demandez : mais pourquoi $]0,1[$ ouvert ? Eh bien, parce que la racine carrée n'est pas dérivable en zéro, mais ce n'est même pas suffisant. Il faut vérifier qu'effectivement, ça "ne marche pas". Je le fais en zéro (on peut s'en sortir en 1 sans faire de calcul en remarquant que l'expression $x(1-x)$ est symétrique par rapport à $x = \frac{1}{2}$...). Soit $h > 0$.

$$\begin{aligned}\frac{g(h)-g(0)}{h-0} &= \frac{g(h)}{h}\\ &= \frac{\sqrt{h-h^2}}{h}\\ &= \frac{\sqrt{1-h}}{\sqrt{h}}\end{aligned}$$

Quand $h \to 0$:

- $\sqrt{1-h} \to 1$;
- $\sqrt{h} \to 0$.

Et cette expression tend vers $+\infty$ quand h tend vers 0. g n'est donc pas dérivable en zéro.

♦ **DG.4** Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$f(x) = 5x^4 + 9x^3 - 7x^2 + 1.$$

Étudier les variations de f.

☞ **Correction exercice 4 :** f est dérivable sur $\mathbf{R}$ (fonction polynomiale) et $\forall x \in \mathbf{R}$:

$$\begin{aligned}f'(x) &= 20x^3 + 27x^2 - 14x\\ &= (20x^2 + 27x - 14)x\end{aligned}$$

D'où :

x	$-\infty$		$-7/4$		0		$2/5$		$+\infty$
Signe de x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $20x^2+27x-14$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de f		↘		↗		↘		↗	

Je vous laisse gentiment les calculs des images de $-7/4$, 0 et $2/5$!

♦ **DG.5** Soit f une fonction définie sur $\mathbf{R} \setminus \left\{\frac{2}{3}\right\}$ par :

$$f(x) = \frac{cx^2 + d}{3x - 2}.$$

On appelle $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère.

1) Déterminer la fonction dérivée de f.

2) Déterminer c et d pour que f vérifie les deux conditions suivantes :

$$f(0) = 1 \qquad \text{et} \qquad f'(1) = 0.$$

☞ **Correction exercice 5 :**

1) f est dérivable sur $\mathbf{R}\setminus\left\{\frac{2}{3}\right\}$ comme quotient de polynômes dont le dénominateur ne s'annule pas sur cet ensemble et $\forall x \in \mathbf{R}\setminus\left\{\frac{2}{3}\right\}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2cx(3x-2)-(cx^2+d)3}{(3x-2)^2} \\ &= \frac{3cx^2-4cx-3d}{(3x-2)^2} \end{aligned}$$

2) On traduit les égalités :

- $f(0)=1 \iff d=-2$;
- $f'(1)=0 \iff -c+6=0$ donc $c=6$.

♦ **DG.6** Le but de cet exercice est de montrer que pour tout $x \in]0;+\infty[$ on a : $x^2+\frac{2}{x} \geqslant 3$.

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x)=x^2+\frac{2}{x}.$$

1) Calculer la dérivée de f.

2) Montrer que pour tout $x>0$:

$$f'(x)=\frac{2(x-1)(x^2+x+1)}{x^2}.$$

3) En déduire le tableau de variations de f.

4) Conclure.

☞ **Correction exercice 6 :**

1) f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et pour tout x dans cet intervalle :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x-\frac{2}{x^2} \\ &= \frac{2x^3-2}{x^2}. \end{aligned}$$

2) On a pour tout $x>0$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x^3-2}{x^2} \\ &= \frac{2(x^3-1)}{x^2} \\ &= \frac{2(x-1)(1+x+x^2)}{x^2}. \end{aligned}$$

Remarque 2 Ici, on pouvait aussi développer l'expression donnée pour retomber sur celle de la question 1.

3) Voici :

x	0		1		$+\infty$
Signe de $x-1$		$-$	0	$+$	
Signe de x^2+x+1		$+$		$+$	
Signe de $f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
Variations de f	‖	↘	$f(1)=3$	↗	

4) La tableau de variations nous permet d'affirmer que $\forall x \in]0;+\infty[$, $f(x) \geqslant f(1)$ donc :

$$\forall x \in]0;+\infty[, \quad x+\frac{2}{x} \geqslant 3.$$

♦ **DG.7** On considère la fonction f définie sur $[0\,;9]$ par :

$$f(x) = 3 - \sqrt{x}.$$

On appelle $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

On considère un point M d'abscisse x appartenant à la courbe $\mathcal{C}_f$ et on construit comme l'indique la figure ci-dessous un rectangle de sommets O et M et dont les côtés sont parallèles aux axes.



On note $A(x)$ l'aire de ce rectangle en fonction de x.

1) Donner l'expression de la fonction A.

2) Étudier les variations de A.

3) Déterminer la position du point M afin que l'aire du rectangle soit maximale.

☞ **Correction exercice 7 :**

1) On a pour tout $x \in [0,9]$, $A(x) = x\left(3 - \sqrt{x}\right)$.

2) A est dérivable de manière immédiate sur $]0,9]$. Et pour tout $x \in]0,9]$:

$$\begin{aligned} A'(x) &= 3 - \sqrt{x} + x\left(\frac{-1}{2\sqrt{x}}\right) \\ &= 3 - \sqrt{x} - \frac{1}{2}\sqrt{x} \\ &= 3 - \frac{3}{2}\sqrt{x}. \end{aligned}$$

Et en zéro ?? Eh bien les formules de dérivation ne marchent pas (à cause de la racine carrée), il faut faire à la main. Soit $h > 0$:

$$\begin{aligned} \frac{A(h) - A(0)}{h - 0} &= \frac{h\left(3 - \sqrt{h}\right)}{h} \\ &= 3 - \sqrt{h} \end{aligned}$$

qui tend vers 3 quand h tend vers 0. A est donc dérivable en zéro et $A'(0) = 3$. On étudie maintenant le signe de $A'(x)$:

$$\begin{aligned} & A(x) \geqslant 0 \\ \iff & 3 - \frac{3}{2}\sqrt{x} \geqslant 0 \\ \iff & \frac{3}{2}\sqrt{x} \leqslant 3 \\ \iff & \sqrt{x} \leqslant 2 \\ \iff & 0 \leqslant x \leqslant 4. \end{aligned}$$

On obtient donc :

x	0		4		9
Signe de $A'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de A	0	↗	$A(4) = 4$	↘	0

3) L'aire du rectangle est maximale et vaut 4 unité d'aire quand M a pour abscisse 4.