Chapitre 3

Limites de fonctions

Il faut entendre par dernier quotient des quantités évanouissantes le quotient qu'ont entre elles ces quantités qui diminuent, non pas avant de s'évanouir, ni après qu'elles se sont évanouies, mais au moment même où elles s'évanouissent.

Isaac Newton (1643-1727).

I Limites en $\pm\infty$

3.1.1 Limite finie d'une fonction en $+\infty$

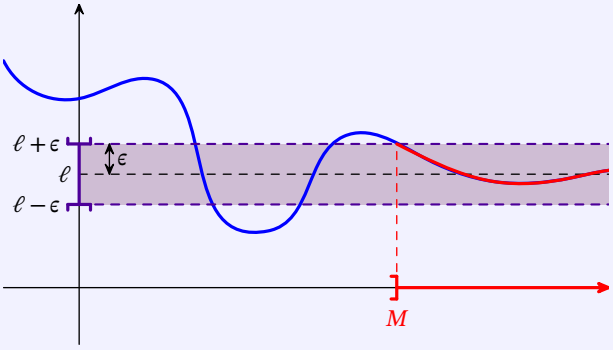
Définition 1 (Limite finie d'une fonction en $+\infty$) —

On dit que f admet pour limite le réel ℓ en $+\infty$ si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x suffisamment grand. On note :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell.$$

La définition formelle est :

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists M \in \mathbf{R}, \quad x > M \;\Rightarrow\; |f(x) - \ell| < \epsilon.$$



3.1.2 Limite finie d'une fonction en $-\infty$

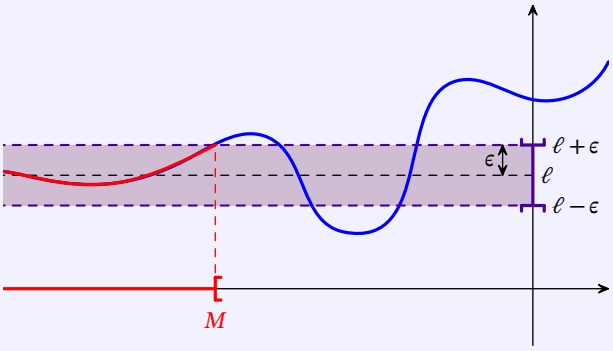
Définition 2 (Limite finie d'une fonction en $-\infty$) —

On dit que f admet pour limite le réel ℓ en $-\infty$ si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x « suffisamment négatif ». On note :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell.$$

La définition formelle est :

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists M \in \mathbf{R}, \quad x < M \;\Rightarrow\; |f(x) - \ell| < \epsilon.$$



Définition 3 (Asymptote horizontale) — On dit que la droite d'équation $y = \ell$ est une asymptote horizontale de la fonction f si la fonction f admet pour limite ℓ en $+\infty$ ou en $-\infty$.

3.1.3 Limite infinie d'une fonction en $\pm\infty$

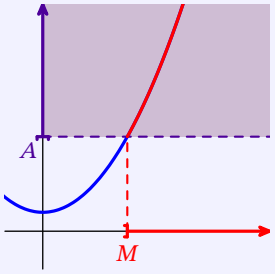
Définition 4 (Limite infinie d'une fonction en $\pm\infty$) — Soit f une fonction définie sur un intervalle du type $]a;+\infty[$. On dit que :

- f admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$ si pour tout nombre A, il existe une valeur M à partir de laquelle, si $x > M$, alors $f(x) > A$. On note

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

Définition formelle :

$$\forall A \in \mathbf{R}, \quad \exists M \in \mathbf{R}, \quad x > M \;\Rightarrow\; f(x) > A.$$

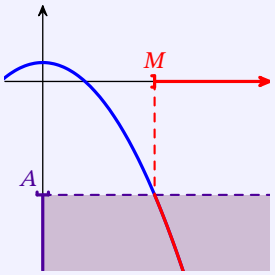


- f admet pour limite $-\infty$ en $+\infty$ si pour tout nombre A, il existe une valeur M à partir de laquelle, si $x > M$, alors $f(x) < A$. On note

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty.$$

Définition formelle :

$$\forall A \in \mathbf{R}, \quad \exists M \in \mathbf{R}, \quad x > M \;\Rightarrow\; f(x) < A.$$



- On pourrait définir de la même manière $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

II Limites en un point

3.2.1 Limite infinie d'une fonction en un point

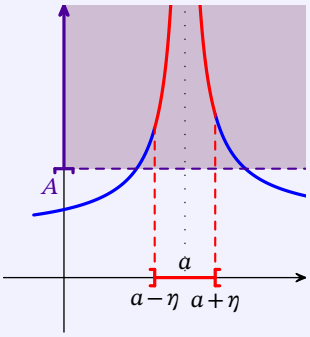
Définition 5 (Limite infinie d'une fonction en un point) —

On dit que f tend vers $+\infty$ quand x tend vers un réel a si tout intervalle de la forme $]A;+\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x « suffisamment proche de a ». On note :

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty.$$

Si $\mathcal{D}$ est le domaine de définition de f, la définition formelle est :

$$\forall A \in \mathbf{R}, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in \mathcal{D}, \quad |x-a| < \eta \;\Rightarrow\; f(x) > A.$$



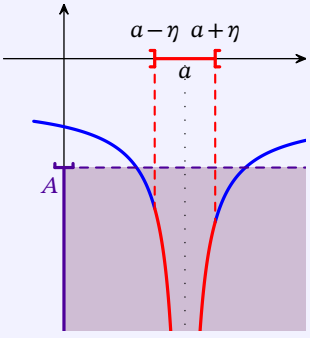
Définition 6 (Limite infinie d'une fonction en un point) —

On dit que f tend vers $-\infty$ quand x tend vers un réel a si tout intervalle de la forme $]-\infty;A[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x « suffisamment proche de a ». On note :

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty.$$

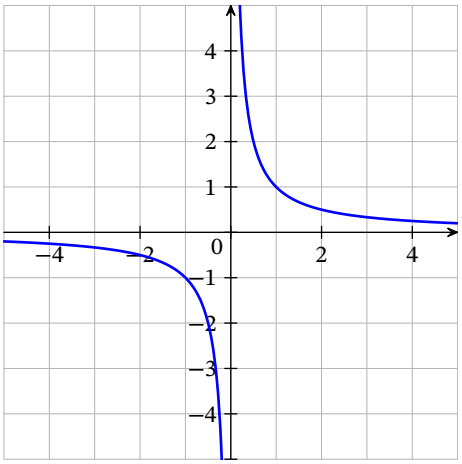
Si $\mathcal{D}$ est le domaine de définition de f, la définition formelle est :

$$\forall A \in \mathbf{R}, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in \mathcal{D}, \quad |x-a| < \eta \;\Rightarrow\; f(x) < A.$$



Remarque : on a parfois besoin de distinguer la limite à droite et la limite à gauche en un point, comme le montre l'exemple de la fonction inverse. Dans cette exemple, on note :

- $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$.
- $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$.



Définition 7 (Asymptote verticale) — On dit que la droite d'équation $x = a$ est une asymptote horizontale de la fonction f si la fonction f admet pour limite $+\infty$ ou $-\infty$ en a.

3.2.2 Limite finie en un point

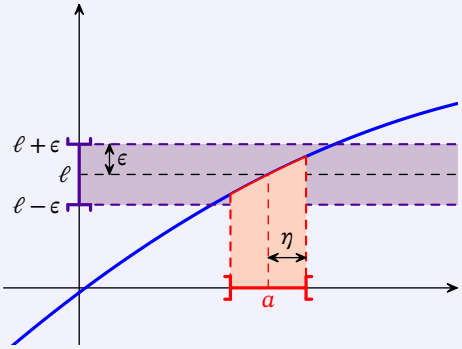
Définition 8 (Limite finie d'une fonction en un point) —

On dit que f tend vers ℓ quand x tend vers un réel a si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x « suffisamment proche de a ». On note :

$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell.$$

Si $\mathcal{D}$ est le domaine de définition de f, la définition formelle est :

$$\forall \epsilon > 0,\quad \exists \eta > 0,\quad \forall x \in \mathcal{D},\quad |x-a| < \eta \;\Rightarrow\; |f(x)-\ell| < \epsilon.$$

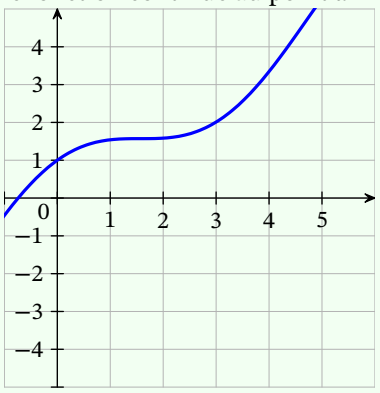


Proposition 3.1 (Unicité de la limite) — *Si une fonction f admet une limite finie en un point a, alors cette limite est **unique**.*

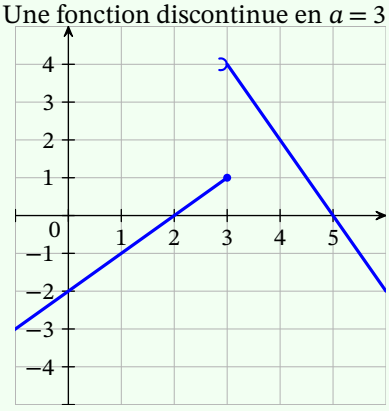
Définition 9 (Continuité) — On dit qu'une fonction f est continue en un point a si f est définie en a et que f admet une limite en a, qui est alors nécessairement $f(a)$.

☞ **Exemple 1**

Une fonction continue au point $a = 3$:



Une fonction discontinue en $a = 3$:



III Calculs de limites

3.3.1 Fonctions de références

Proposition 3.2 (admis) —

Fonction	*Expression*	*Limites*
Constante	$f(x)=k$	
Puissance	$f(x)=x^n$ $(n\in\mathbf{N}^*)$	$\lim\limits_{x\to+\infty} x^n=$ $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n=\begin{cases}$
Racine Carrée	$f(x)=\sqrt{x}$	$\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}=$

Proposition 3.3 (admis) —

Fonction	*Expression*	*Limites*	
Inverse	$f(x)=\dfrac{1}{x}$	$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x}=$	$\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{1}{x}=$
		$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x}=$	$\lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{1}{x}=$

3.3.2 Opérations sur les fonctions

Proposition 3.4 (Limites d'une somme, admis) —

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)+g(x)$						

Proposition 3.5 (Limites d'un produit, admis) — *La règle des signes de $f(x)\times g(x)$ s'applique pour donner le signe des symboles ∞.*

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$	ℓ	$\ell\neq0$	∞	0
$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$	ℓ'	∞	∞	∞
$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)\times g(x)$				

Proposition 3.6 (Limites d'un quotient, admis) — *La règle des signes s'applique pour donner le signe des symboles* ∞.

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$	ℓ	$\ell \neq 0$	ℓ	∞	∞	0
$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$	$\ell' \neq 0$	0 *et* g *de signe constant au voisinage de* α	∞	ℓ' *et* g *de signe constant au voisinage de* α	∞	0
$\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{f(x)}{g(x)}$						

3.3.3 Fonction exponentielle

Proposition 3.7 — *On a* $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$

3.3.4 Composition de limites

Proposition 3.8 (admis) — *Ici,* α, β, L *désignent soit des réels, soit* $+\infty$, *soit* $-\infty$.

Si $\begin{cases} \lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \beta \\ \lim\limits_{x\to\beta} g(x) = L \end{cases}$ *Alors* $\lim\limits_{x\to\alpha} (g\circ f)(x) = L$

☞ **Exemple 2** Que valent $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{1-2x}$ et $\lim\limits_{x\to2^-} \exp\left(\dfrac{1}{4-2x}\right)$?

IV Limites et comparaison

Proposition 3.9 — *Soient* f *et* g *deux fonctions telles qu'il existe un réel* A, *de manière que sur* $[A;+\infty[$ *on ait :*

$$f(x) \leqslant g(x).$$

Alors :

- *Si* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, *alors* $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$
- *Si* $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$, *alors* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

Théorème 3.10 (Théorème d'encadrement, admis) — *Soit* ℓ *un réel, et* $\alpha \in \mathbf{R}\cup\{+\infty;-\infty\}$.
Si f, g *et* h *sont trois fonctions telles qu'au voisinage de* α, *on a :*

$$f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$$

et si $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \lim\limits_{x\to\alpha} h(x) = \ell$, *alors* g *admet une limite en* α *et* $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = \ell$.

Théorème 3.11 (Croissances comparées) — *Pour tout entier naturel* n, *on a :*

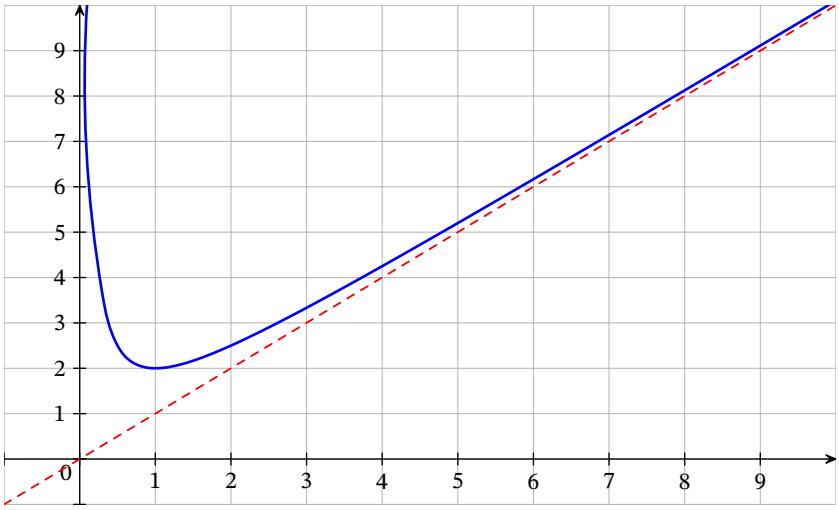
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^n} = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n \mathrm{e}^x = 0$

V Compléments - asymptotes obliques

Parfois, une fonction f tend vers l'infini en l'infini d'une manière bien précise, "presque" comme une droite oblique (et non horizontale ou verticale). Par exemple, la courbe de la fonction

$$f : x \mapsto x + \frac{1}{x}$$

sur $]0;+\infty[$ donne :



On peut constater que sa courbe "se rapproche" de celle de la droite d'équation $y = x$.

Définition 10 (Asymptote oblique) — Si f est définie au voisinage de $+\infty$, on dit que la droite d'équation $y = ax + b$ est une **asymptote oblique** à la courbe de f si :

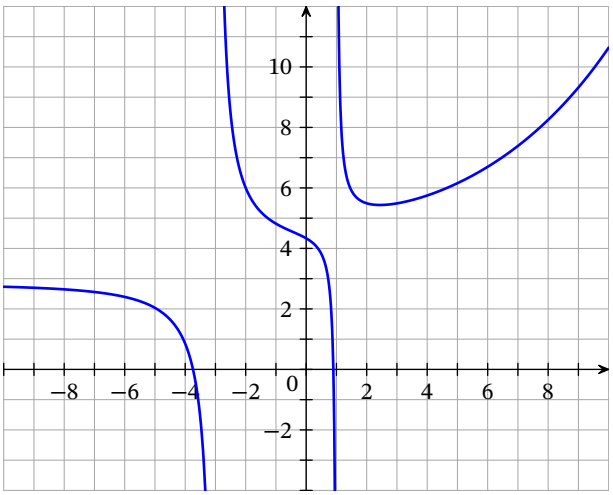
$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$$

☞ **Exemple 3** Démontrer que la droite d'équation $y = x$ est bien asymptote oblique de la fonction $f : x \mapsto x + \frac{1}{x}$.
Déterminer ensuite une asymptote oblique à $f : x \mapsto \frac{x^3 - 2x^2 + 1}{x^2 + 1}$ (commencer par étudier le quotient $\frac{f(x)}{x}$).

VI Exercices

Graphiquement

♦ **LIM.1** On considère la courbe d'une fonction f donnée ci-dessous :



Pour toutes les questions, on répondra en lisant graphiquement la réponse (donc tout n'est que conjecture, rien n'est démontré) :

1) Tracer la droite d'équation $y = 3$ en rouge.

2) Que remarque-t-on quand x se « rapproche » de $-\infty$?

3) Compléter :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) =$$

4) Tracer la droite d'équation $x = -3$ en rouge.

5) Compléter :

$$\lim_{\substack{x\to-3\\x<-3}} f(x) = \qquad \lim_{\substack{x\to-3\\x>-3}} f(x) =$$

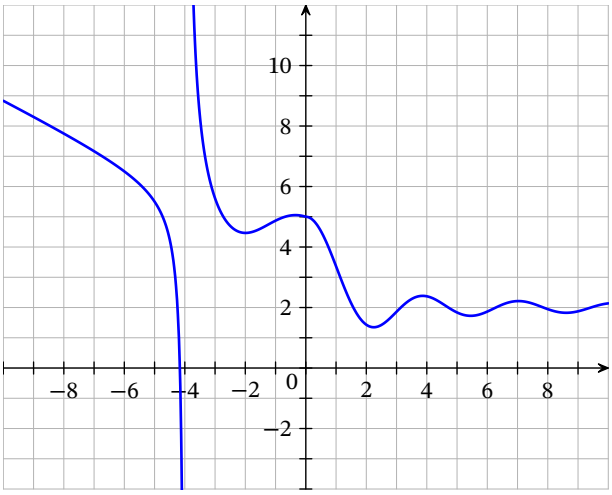
6) Compléter :

$$\lim_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x) = \qquad \lim_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x) =$$

7) Compléter :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) =$$

♦ **LIM.2** A l'aide du graphique de la fonction f donné, compléter les égalités ci-dessous :



1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) =$

2) $\lim\limits_{\substack{x\to-4\\x<-4}} f(x) =$

3) $\lim\limits_{\dots} f(x) = +\infty$

4) $\lim\limits_{\dots} f(x) = +\infty$

♦ **LIM.3** On donne le tableau de variations d'une fonction f :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
Variations de f	$+\infty$	$\searrow$ 2 $\nearrow$	7

1) Donner, d'après le tableau de variations, les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

2) En déduire l'existence d'une asymptote à la courbe de la fonction f.

3) Peut-on affirmer qu'il existe un réel x_0 tel que $f(x) > 1000$ pour tout réel $x < x_0$?

Calculs

♦ **LIM.4** On considère la fonction inverse notée f :
$\forall x \in \mathbf{R}^*, \quad f(x) = \dfrac{1}{x}$.

1) Soit ϵ un nombre strictement positif. Résoudre sur $\mathbf{R}^{+*}$ l'inéquation $-\epsilon \leqslant f(x) \leqslant \epsilon$.

2) On peut déduire du calcul ci-dessus que dès lors que x est « assez grand », $f(x)$ est « assez proche » de 0. Compléter alors :

$$\lim_{\dots} f(x) =$$

3) Montrer de même que $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = +\infty$.

♦ **LIM.5** Déterminer les limites aux bornes de son ensemble de définition des fonctions ci-dessous :

1) f définie sur $]2;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x^2-3x+6}{x-2}$.

2) f définie sur $]1;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{-2x^2+x-3}{x(x-1)}$.

♦ **LIM.6** Étudier les limites de la fonction f aux valeurs demandées, et interpréter graphiquement :

1) $f(x)=2x+1+\dfrac{1}{x^2}$ en 0, en $+\infty$ et en $-\infty$;

2) $f(x)=(4-x^2)(3x-2)$ en 0, en $+\infty$ et en $-\infty$;

3) $f(x)=4x-1+\dfrac{1}{x-3}$ en 3, en $+\infty$ et en $-\infty$;

4) $f(x)=\dfrac{4x}{4-x}$ en 0 et en 4.

♦ **LIM.7** Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{5-\dfrac{4}{x^2}}$;

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2-\dfrac{1}{x}\right)^4$;

3) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{2-x}{x}$;

4) $\lim\limits_{x\to+\infty}4x^2+9-\dfrac{16}{x^2+4}$.

♦ **LIM.8** Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^5-6x^4+3x^2-12)$;

2) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3+x+3)\mathrm{e}^x$;

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{9x+2}{3x-7}$;

4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{9x^2+2x}{3x^3-7}$;

5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{9x+2}{x-3}}$;

6) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{\dfrac{9x+2}{x-3}}$;

7) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2-x+\dfrac{1}{x^2}\right)\mathrm{e}^{-x}$;

8) $\lim\limits_{x\to0}\left(x^2-x+\dfrac{1}{x^2}\right)$.

Études de fonctions

♦ **LIM.9** Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x)=3+x\mathrm{e}^{1-x}$.

1) Calculer la limite de f en $-\infty$.

2) a) Montrer que pour tout réel x, $f(x)=3+\dfrac{x\mathrm{e}}{\mathrm{e}^x}$.

b) En déduire la limite de f en $+\infty$.

3) Dresser le tableau de variations complet de f.

♦ **LIM.10** Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{3\mathrm{e}^{0,5x}}{\mathrm{e}^{0,5x}+2}$.

1) Calculer la limite de f en $+\infty$.
On écrira $f(x)=3-\dfrac{6}{\mathrm{e}^{0,5x}+2}$.

2) Dresser le tableau de variations complet de f.

♦ **LIM.11** Soit f la fonction définie sur $]-\infty;7[\cup]7;+\infty[$ par $f(x)=x+\dfrac{1}{(x-7)^2}$.

1) Calculer la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

2) Déterminer la limite de f en 7^- et en 7^+.

3) Déterminer le tableau de variations complet de f.

♦ **LIM.12**

Partie A

Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=x\mathrm{e}^{-x^2}$.

1) Démontrer que pour tout réel $x>0$,

$$-x^2\leqslant -2x+1, \text{ puis } \mathrm{e}^{-x^2}\leqslant \mathrm{e}^{-2x+1}.$$

2) a) Démontrer que pour tout réel $x>0$:

$$x\mathrm{e}^{-2x+1}=-\mathrm{e}/2\times\left(-2x\mathrm{e}^{-2x}\right).$$

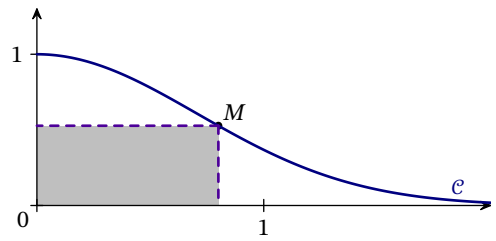
b) En déduire la limite de f en $+\infty$.

3) Calculer $f'(x)$ pour tout réel x de $[0+\infty[$.

4) Étudier les variations de f sur $[0+\infty[$.

Partie B

Une entreprise spécialisée est chargée par l'office de tourisme d'une station de ski de la conception d'un panneau publicitaire ayant la forme d'une piste de ski.
Le panneau est découpé dans une plaque rectangulaire de 2 mètres sur 1 mètre.
La courbe $\mathcal{C}$ est la courbe représentative de la fonction g définie sur $[0;2]$ par $g(x)=\mathrm{e}^{-x^2}$.
Afin de donner des informations sur la station, une zone rectangulaire est insérée sur le panneau comme indiqué sur la figure ci-dessous :



L'unité choisie est le mètre. Pour x nombre réel dans $[0;2]$, on note :

- M le point de la courbe de $\mathcal{C}$ d'abscisse x ;
- N le point de coordonnées $(x,0)$;
- P le point de coordonnées $(0,\mathrm{e}^{-x^2})$;
- $A(x)$ l'aire du rectangle $ONMP$.

1) Justifier que pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0;2]$, on a : $A(x) = xe^{-x^2}$.

2) Déterminer la position du point M sur la courbe $\mathcal{C}$ pour laquelle l'aire du rectangle $ONMP$ est maximale.

3) Le rectangle $ONMP$ d'aire maximale obtenu à la question précédente doit être peint en bleu, et le reste du panneau en blanc. Déterminer, en m^2 et à 10^{-2} près, la mesure de la surface à peindre en bleu.

♦ **LIM.13 (Pression dans un tube)** Dans un tube cylindrique rempli de gaz, on déplace un piston. La longueur du tube est de 20 cm et la position du piston est repérée grâce à une graduation de 0 à 20 qu'on note x.
La loi de Boyle-Mariotte stipule qu'à température constante, la produit du volume d'une gaz parfait par sa pression est constant. On note P_0 la pression initiale (lorsque $x = 0$) et $P(x)$ la pression lorsque le piston est repéré par la graduation x avec $0 \leqslant x < 20$. On définit ainsi une fonction P.

1) Exprimer $P(x)$ en fonction de x et P_0.

2) a) Calculer la limite de la fonction P en 20.

b) Interpréter ce résultat.

♦ **LIM.14 (Relativité générale)** Dans la théorie de la Relativité générale, la longueur d'un objet en mouvement, vu par un observateur immobile, et sa masse dépendent de sa vitesse.
On note L_0 la longueur de l'objet au repos (en m), m_0 sa masse au repos (en kg) et v la vitesse de l'objet en $m.s^{-1}$ par rapport à l'observateur, c la vitesse de la lumière ($c \approx 3 \times 10^8$ $m.s^{-1}$).

1) La fonction L donnant la longueur de l'objet est définie par :

$$L : [0;c[\to \mathbf{R}$$
$$v \mapsto L_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

a) Calculer la dérivée de la fonction L.

b) En déduire les variations de L.

c) Calculer la limite de L en c.

2) La fonction m donnant la masse de l'objet est définie par :

$$m : [0;c[\to \mathbf{R}$$
$$v \mapsto \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

a) Calculer la dérivée de la fonction m.

b) En déduire les variations de m.

c) Calculer la limite de m en c.

♦ **LIM.15 (Modèle de chute)** On s'intéresse à la chute d'une goutte d'eau qui se détache d'un nuage sans vitesse initiale. Un modèle simplifié permet d'établir que la vitesse instantanée verticale, en $m.s^{-1}$, de la goutte d'eau en fonction de la durée t (en s) de la chute est donnée par la fonction v :

$$v : [0;+\infty[\to \mathbf{R}$$
$$t \mapsto 9{,}81\frac{m}{k}\left(1-e^{-\frac{k}{m}t}\right)$$

m est la masse en milligramme de la goutte et k est un coefficient de frottement avec l'air strictement positif.

1) Déterminer les variations de la vitesse de la goutte d'eau.

2) Montrer que $\lim\limits_{t\to+\infty} v(t) = 9{,}81\dfrac{m}{k}$.

3) Un scientifique affirme qu'au bout d'une durée de chute égale à $5\dfrac{m}{k}$, la vitesse de la goutte dépasse 99% de sa vitesse limite. Est-ce vrai ?

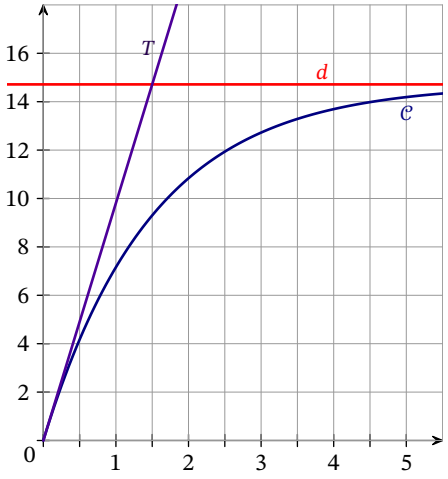
4) On nomme $\mathcal{C}$ la courbe de la fonction v.

a) Justifier que la courbe $\mathcal{C}$ admet une asymptote horizontale d, en donner une équation.

b) Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}$ en 0.

c) Calculer l'abscisse du point d'intersection de T et d.

d) On a représenté $\mathcal{C}$, T et d sur le graphique ci-dessous.



Quelle est la valeur de $\dfrac{m}{k}$? Justifier.