Chapitre

1 Intervalles

Le seul enseignement qu'un professeur peut donner, à mon avis, est de penser devant ses étudiants.

Henri-Léon Lebesgue (1875-1941).

I L'ensemble R

1.1.1 Rappels sur les nombres réels

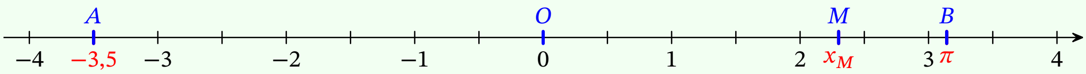
Définition 1 (L'ensemble R) — Tous les nombres vus jusqu'ici font partie d'un ensemble : celui des **nombres réels**. Il est noté **R**.

☞ **Exemple 1**

1.1.2 Représentation graphique

Définition 2 (Droite numérique) — Graphiquement, on peut représenter les nombres réels sur une droite orientée. Chaque point de la droite est repéré par un nombre, qui est appelé l'**abscisse** de ce point. Dans l'exemple ci-dessous, l'abscisse du point M est x_M : on le lit « x **indice** M ». À l'oral, on dit parfois plus rapidement, quand il n'y a pas de confusion possible : « x M » .

☞ **Exemple 2** Quelles sont les valeurs de x_A et x_B ?



Définition 3 (Origine de l'axe) —

II Intervalles de R

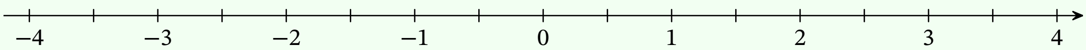
1.2.1 Définitions

Définition 4 (Symboles d'ordre) — Pour ordonner les nombres, on utilise quatre symboles :

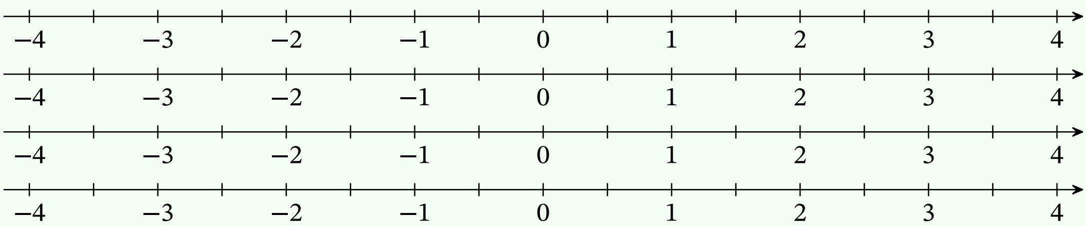
- $\leqslant$ signifie
- $\geqslant$ signifie
- $<$ signifie
- $>$ signifie

Définition 5 (Intervalle de R) — Un **intervalle** de **R** est un sous-ensemble I de **R** tel que si x et y appartiennent à I dans l'ordre $x \leqslant y$, alors tout nombre z tel que $x \leqslant z \leqslant y$ appartient aussi à I.

☞ **Exemple 3** Visuellement, un intervalle de **R** est un sous-ensemble "d'un seul tenant", qu'on peut dessiner sans lever le stylo. Par exemple, le sous-ensemble rouge ci-dessous n'est pas un intervalle.



Alors que les sous-ensembles bleus sont tous des intervalles :



Proposition 1.1 (Intervalles réels, admis) — *Il existe 9 types d'intervalles réels et on peut caractériser chacun d'eux par une inégalité. Lorsque le crochet inclut la borne de l'intervalle, celle-ci appartient à l'intervalle (on parle de borne **fermée**). Si le crochet exclut la borne, celle-ci n'appartient pas à l'intervalle (on parle de borne **ouverte**).*

L'intervalle noté :	est l'ensemble des réels x tels que :	Visualisation
$[a,b]$	$a \leqslant x \leqslant b$	a b
$]a,b[$	$a < x < b$	a b
$[a,b[$	$a \leqslant x < b$	a b
$]a,b]$	$a < x \leqslant b$	a b
$[a,+\infty[$	$x \geqslant a$	a
$]a,+\infty[$	$x > a$	a
$]-\infty,b]$	$x \leqslant b$	b
$]-\infty,b[$	$x < b$	b
$]-\infty,+\infty[$	pas de contrainte sur x	

Définition 6 (Symboles $\in$ et $\notin$) —

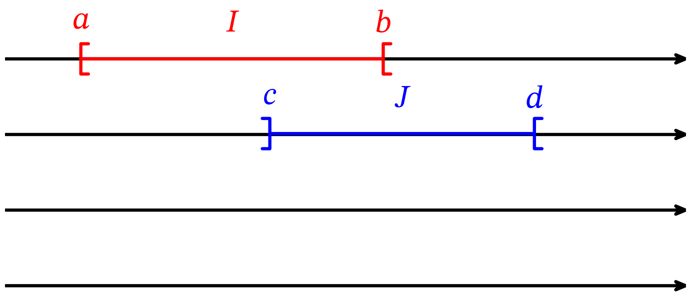
1.2.2 Réunion, intersection d'intervalles

Dans tout ce paragraphe, I et J désignent des intervalles réels.

Définition 7 (Union, intersection d'intervalles) — On appelle union (ou réunion) de I et J l'ensemble des nombres réels qui appartiennent à I OU à J, et on note $I \cup J$ l'union de I et J.
On appelle intersection de I et J l'ensemble des nombres réels qui appartiennent à I ET à J, et on note $I \cap J$ l'intersection de I et J.

Remarque 1 Le OU de l'union de I et J n'est pas exclusif : si un nombre x appartient à I ET à J, alors il appartient à I donc à I OU J.

Visualisation de l'union et de l'intersection sur un exemple :



III Encadrement et valeurs approchées

1.3.1 Rappel sur les puissances de 10

Si n est un entier naturel (c'est-à-dire, un entier positif), alors :

$10^n =$ et $10^{-n} =$

☞ **Exemple 4** • $10^5 =$ • $10^{-3} =$

1.3.2 Encadrement

Définition 8 — Soient a, b et x des réels. Si $a \leqslant x \leqslant b$, on dit que a et b **encadrent** x, et la double inégalité $a \leqslant x \leqslant b$ est appelée un **encadrement** de x. Le réel $b - a$ est alors appelé l'**amplitude** de l'encadrement.

☞ **Exemple 5**
-
-
-

Remarque 2 Dire que deux réels a et b encadrent un réel x équivaut à dire que $x \in [a;b]$.

1.3.3 Valeurs approchées

Définition 9 — Soient x un réel et n un entier naturel. On suppose que a et b sont deux nombres décimaux ayant au maximum n chiffres après la virgule, que a et b encadrent x et que $b - a = 10^{-n}$. On dit alors que :
- a est une **valeur approchée par défaut** à 10^{-n} près de x.
- b est une **valeur approchée par excès** à 10^{-n} près de x.

☞ **Exemple 6**
- L'encadrement $1{,}414 \leqslant \sqrt{2} \leqslant 1{,}415$ montre que 1,414 est une valeur approchée par défaut à 10^{-3} près de $\sqrt{2}$ et 1,415 est une valeur approchée par excès à 10^{-3} près de $\sqrt{2}$.
- L'encadrement $3{,}12 \leqslant \pi \leqslant 3{,}15$ ne permet pas de déterminer une valeur approchée de π à 10^{-2} près car l'amplitude est supérieure à 10^{-2}.
- Si x est un réel tel que $1{,}4999 \leqslant x \leqslant 1{,}5$, on peut en déduire que $1{,}4999 \leqslant x \leqslant 1{,}5000$, donc 1,4999 est une valeur approchée par défaut à 10^{-4} près de x et 1,5 est une valeur approchée par excès à 10^{-4} près de x.

Remarque 3 Si x est un réel positif dont on connaît le début du développement décimal, on peut obtenir une valeur approchée par défaut par **troncature** et une valeur approchée par excès en ajoutant 1 au dernier chiffre de la troncature.

☞ **Exemple 7** Le développement décimal de π est $\pi = 3{,}141592654\ldots$ Donc :
- une valeur approchée par défaut à 10^{-6} près de π est 3,141592 (on a tronqué après la 6e décimale);
- une valeur approchée par excès à 10^{-6} près de π est 3,141593 (on a ajouté 1 à la dernière décimale de la troncature).

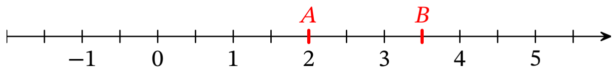
Définition 10 — Soit x un réel, n un entier naturel et a et b les valeurs approchées par défaut et par excès à 10^{-n} près de x définies ci-dessus.
La **valeur arrondie** de x à 10^{-n} près est celui des deux nombres a ou b qui est le plus proche de x.
Si x est à égale distance de a et b, on convient que la valeur arrondie de x est b.

☞ **Exemple 8**
- La valeur arrondie de $\sqrt{2}$ à 10^{-2} près est
- La valeur arrondie de $-\frac{2}{3}$ à 10^{-4} près est
- La valeur arrondie de 1,4375 à 10^{-3} près est

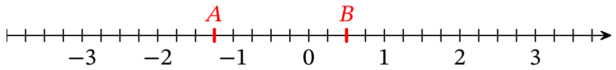
IV Exercices

Repérage

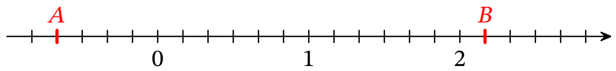
♦ **INT.1** Pour chaque axe ci-dessous, donner les abscisses des points A et B, nommées respectivement x_A et x_B :



$x_A =$ $x_B =$

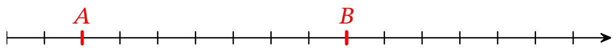


$x_A =$ $x_B =$

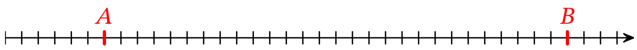


$x_A =$ $x_B =$

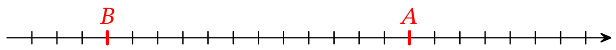
♦ **INT.2** (★) Pour chaque axe ci-dessous, indiquer les points d'abscisse 1 et 0 (s'ils ne sont pas déjà indiqués) en s'aidant des abscisses de A et B indiquées :



$x_A = -1$ $x_B = 2{,}5$



$x_A = -\dfrac{3}{2}$ $x_B = 2$



$x_A = \dfrac{5}{3}$ $x_B = -\dfrac{1}{3}$

Intervalles

♦ **INT.3** En justifiant, dire si les phrases suivantes sont vraies ou fausses :

- $-3 \leqslant 0 < 10^{-2}$;
- $0{,}01 > 10^{-3} > -10^{-1}$;
- $\dfrac{1}{4} \leqslant \dfrac{1}{9}$;
- $\dfrac{3}{8} \leqslant \dfrac{5}{8}$.

♦ **INT.4** Compléter le tableau suivant :

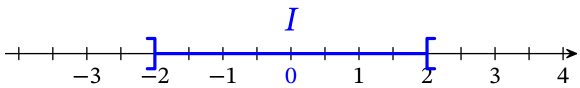
L'ensemble	des réels vérifiant	se note
I	$-3 \leqslant x \leqslant 7$	
J	$-5 \leqslant x < -2$	
K		$]2;13]$
L	$x \leqslant 7$	
M	$1 < x$	

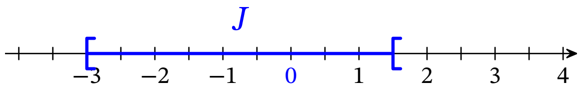
Déterminer ensuite :

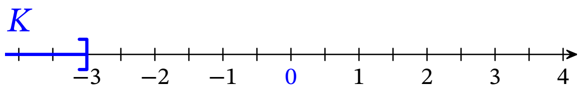
- $I \cap J$,
- $J \cap K$,
- $I \cap L$,
- $I \cup J$,
- $K \cup L$,
- $K \cup M$.

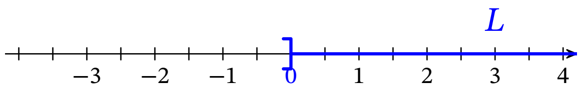
♦ **INT.5** (**Visuellement**)

1) Donner l'écriture (avec crochets) de chaque intervalle ci-dessous :









2) Caractériser les intervalles précédents à l'aide d'inégalités.

3) Déterminer les ensembles suivants :

- $I \cap J$;
- $I \cup J$;
- $J \cup L$;
- $K \cap L$.

♦ **INT.6** Soit x un réel tel que $x > 1$ et $x \leqslant 3$.

1) Traduire l'énoncé sous la forme $x \in \ldots$ en remplaçant les pointillés par un intervalle.

2) Donner un encadrement de :

a) $x + 5$;
b) $x - 2$;
c) $2x$;
d) $-x$;
e) $\dfrac{x}{4}$;
f) $-\dfrac{x}{2}$.

Encadrement, valeurs approchées

On se souviendra, pour l'exercice suivant, que l'ordre d'une inégalité n'est pas changé si l'on ajoute ou soustrait la même quantité à chaque membre de l'inégalité, ou si l'on multiplie par le même nombre positif chaque membre.

En revanche, l'ordre de l'inégalité est inversé si on multiplie par le même nombre négatif chaque membre.

♦ **INT.7** Soient x et y deux réels tels que $x \in [2;7]$ et $y \in [4;5]$.

Donner un encadrement de :

1) $x+y$;

2) xy ;

3) $2x+4y$;

4) $x-y$;

5) $3y-2x$;

6) $(2y-x)(3x-y)$.

♦ **INT.8** En utilisant les valeurs affichées par la calculatrice et en écrivant les inégalités utilisées :

1) donner un encadrement d'amplitude 10^{-3} de $\frac{1}{7}$.

2) Donner une valeur approchée par défaut à 10^{-4} près de $\sqrt{3}$.

3) Donner une valeur approchée par excès à 10^{-2} près de $\frac{\pi}{2}$.

4) Donner la valeur arrondie au millième près de $1-\sqrt{2}$.

5) Donner une valeur approchée par défaut à 10^{-3} près de $-\frac{3}{11}$.

6) Donner une valeur approchée par excès au centième de $-\frac{5}{6}$.

7) Donner une valeur arrondie au millième de $-123{,}6775$.