

Fiche 1 | Équations

1 Équations : vocabulaire

Définition 1 — Une **équation** est une **égalité** dans laquelle figurent un ou plusieurs nombres inconnus, souvent désignés par des lettres.

Exemple 1

- $2a + b = 0$;
- $4x^2 - 12x = 8x + 1$.

Définition 2 — Dans les équations ci-dessus, les nombres a , b et x sont appelés les **inconnues**.

Définition 3 — Une **solution** d'une équation est une valeur de l'inconnue pour laquelle l'égalité est **vraie**.

Exemple 2 Est-ce que 3 est une solution de l'équation $x + 7 = 4 + 2x$?

- $3 + 7 = 10$
- $4 + 2 \times 3 = 4 + 6 = 10$

Donc, si $x = 3$, l'égalité $x + 7 = 4 + 2x$ est **vraie**. 3 est donc une **solution** de cette équation.

Remarque 1 Attention à ne pas écrire d'égalités fausses dans une rédaction : on calcule le membre de gauche, puis éventuellement celui de droite, et ensuite on conclut.

Définition 4 — **Résoudre** une équation, c'est trouver **toutes** les solutions de l'équation.

Remarque 2 Il se peut qu'une équation n'ait pas de solution. Dans ce cas, on note $\emptyset$ l'ensemble des solutions (c'est l'ensemble vide).

Définition 5 — Le symbole $\Leftrightarrow$ signifie "si et seulement si", il indique que la ligne qu'on écrit est **équivalente** à la précédente, autrement dit, les équations situées entre $\Leftrightarrow$ ont les mêmes solutions.

Définition 6 — On dit que deux équations sont équivalentes si elles ont le même ensemble de solutions. Lorsque deux équations (E) et (F) sont équivalentes, on note

$$(E) \Leftrightarrow (F).$$

2 Opérations et égalités

Proposition 1.1 — Une égalité reste vraie si on **ajoute ou soustrait** un même nombre aux deux membres de cette égalité.

Exemple 3

$$\begin{aligned} z + 4 &= 12 \\ \Leftrightarrow z + 4 - 4 &= 12 - 4 \\ \Leftrightarrow z &= 8 \end{aligned}$$

Remarque 3 On vient de trouver une valeur de z pour laquelle l'égalité de départ est vraie, et en fait, on a même montré que c'est la seule solution de l'équation $z + 4 = 12$.

Proposition 1.2 — Une égalité reste vraie si on **multiplie ou divise** les deux membres de cette égalité **par un même nombre non nul**.

Exemple 4

$$\begin{aligned} 5t &= 35 \\ \Leftrightarrow 5t \div 5 &= 35 \div 5 \\ \Leftrightarrow t &= 7 \end{aligned}$$

Remarque 4 7 est la solution de l'équation $5t = 35$.

3 Résolution d'une équation du premier degré à une inconnue

Les équations affines sont toutes les équations qui peuvent se ramener à un équation du type $mx + p = 0$.

On les résout en effectuant les mêmes opérations de chaque côté, de manière à :

- écrire tous les termes en x d'un même côté, tous les termes constants de l'autre ;
- isoler enfin la variable x .

Méthode 1.1

Comment résoudre une équation affine ? Étudions un exemple :

$$4x + 6 = 7x - 3.$$

On commence par écrire les "termes en x " dans un seul membre de l'équation :

$$\begin{aligned} 4x + 6 - 7x &= 7x - 3 - 7x \\ \Leftrightarrow -3x + 6 &= -3 \end{aligned}$$

On regroupe ensuite les "termes constants" dans l'autre membre de l'équation :

$$\begin{aligned} -3x + 6 - 6 &= -3 - 6 \\ \Leftrightarrow -3x &= -9 \\ \Leftrightarrow -3x \div (-3) &= -9 \div (-3) \\ \Leftrightarrow x &= 3. \end{aligned}$$

On peut donc affirmer que : **3 est la solution de l'équation $4x + 6 = 7x - 3$.**

Remarque 5 On peut vérifier (mais comme on a raisonné par équivalence, ce n'est pas obligatoire) ensuite que la valeur 3 trouvée est bien une solution pour l'équation de départ :

- $4 \times 3 + 6 = 12 + 6 = 18$
- $7 \times 3 - 3 = 21 - 3 = 18$

Un autre exemple, plus long :

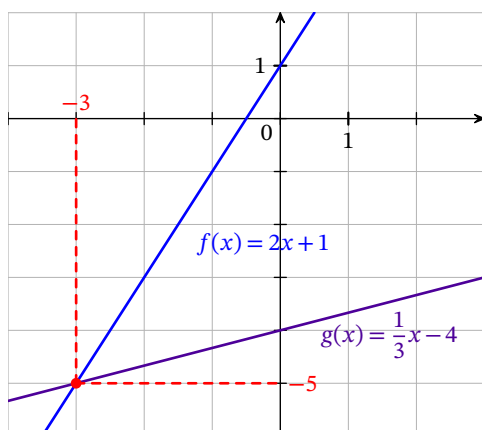
☞ **Exemple 5 (Résoudre l'équation $2x + 1 = \frac{1}{3}x - 4$)**

$$\begin{aligned}
 2x + 1 &= \frac{1}{3}x - 4 \\
 \Leftrightarrow 2x + 1 - 1 &= \frac{1}{3}x - 4 - 1 \\
 \Leftrightarrow 2x &= \frac{1}{3}x - 5 \\
 \Leftrightarrow 2x - \frac{1}{3}x &= \frac{1}{3}x - 5 - \frac{1}{3}x \\
 \Leftrightarrow \frac{5}{3}x &= -5 \\
 \Leftrightarrow \frac{3}{5} \times \left(\frac{5}{3}x\right) &= \frac{3}{5} \times (-5) \\
 \Leftrightarrow x &= -3
 \end{aligned}$$

-3 est donc ici **la solution** de l'équation : l'égalité de départ est vérifiée si $x = -3$ et n'est pas vérifiée si $x \neq -3$.

Remarque 6 Ici, toutes les égalités sont **équivalentes** : on peut passer de l'une à l'autre. On verra que ce n'est pas toujours le cas dans d'autres circonstances.

Illustration graphique de la résolution de l'équation :



Remarque 7 Voir les méthodes pour tracer la droite représentative d'une fonction affine (ici des fonctions f et g où $f(x) = 2x + 1$ et $g(x) = \frac{1}{3}x - 4$).

4 Équation produit

Méthode 1.2

Comment résoudre une équation produit ?

On utilise le fait que **R** muni des lois $+$ et $\times$ est **intègre** :

Proposition 1.3 — *Un produit de réels est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul.*

☞ **Exemple 6 (Résoudre l'équation $(1-x)(3-2x) = 0$)** $(1-x)(3-2x)$ est un produit, ses facteurs sont :

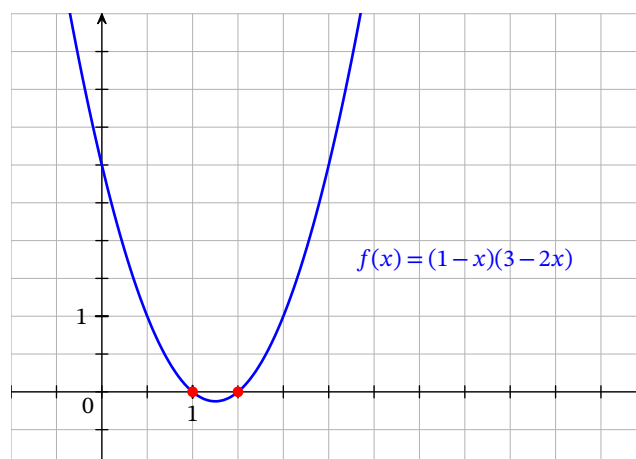
- $1-x$
- $3-2x$

On applique la proposition précédente :

$$(1-x)(3-2x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x = 0 \\ \text{ou} \\ 3-2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ \text{ou} \\ x = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Ainsi, l'équation $(1-x)(3-2x) = 0$ admet deux solutions : 1 et $\frac{3}{2}$.

Illustration graphique de la résolution de l'équation :



5 Se ramener à une équation produit

Remarque 8 Parfois, il faut d'abord factoriser l'expression avant de pouvoir appliquer la proposition, comme dans l'exemple ci-dessous :

☞ **Exemple 7 (Résoudre l'équation $2x^2 - 10x + 12 = 0$)** Ici, on peut montrer que pour tout réel x :

$$2x^2 - 10x + 12 = 2(x-2)(x-3).$$

Appliquons maintenant la proposition :

$$2x^2 - 10x + 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = 0 \\ \text{ou} \\ x-2 = 0 \\ \text{ou} \\ x-3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ \text{ou} \\ x = 3 \end{cases}$$

Remarquons que $2 \neq 0$ donc la première équation de l'accolade n'admet aucune solution. L'équation $2x^2 - 10x + 12 = 0$ admet donc deux solutions qui sont 2 et 3.

Remarque 9 Parfois enfin, il est nécessaire de travailler un peu l'équation avant de se ramener à une équation produit :

☞ **Exemple 8 (Résoudre l'équation $x^2(x+1) = 4x+4$)** Pour tout réel x :

$$\begin{aligned}
 x^2(x+1) &= 4x+4 \\
 \Leftrightarrow x^2(x+1) - 4x - 4 &= 0 \\
 \Leftrightarrow x^2(x+1) - 4(x+1) &= 0 \\
 \Leftrightarrow \underbrace{(x^2-4)}_{a^2-b^2=(a-b)(a+b)} (x+1) &= 0 \\
 \Leftrightarrow (x-2)(x+2)(x+1) &= 0
 \end{aligned}$$

Appliquons maintenant la proposition :

$$x^2(x+1) = 4x+4 \iff \begin{cases} x-2=0 \\ \text{ou} \\ x+2=0 \\ \text{ou} \\ x+1=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=2 \\ \text{ou} \\ x=-2 \\ \text{ou} \\ x=-1 \end{cases}$$

L'équation $x^2(x+1) = 4x+4$ admet donc trois solutions qui sont -1 , 2 et -2 .

Illustration graphique de la résolution de l'équation :

