Fiche 2 | Inéquations, tableaux de signe

1 Inéquation affine

Méthode 2.1

Comment résoudre une inéquation affine ?

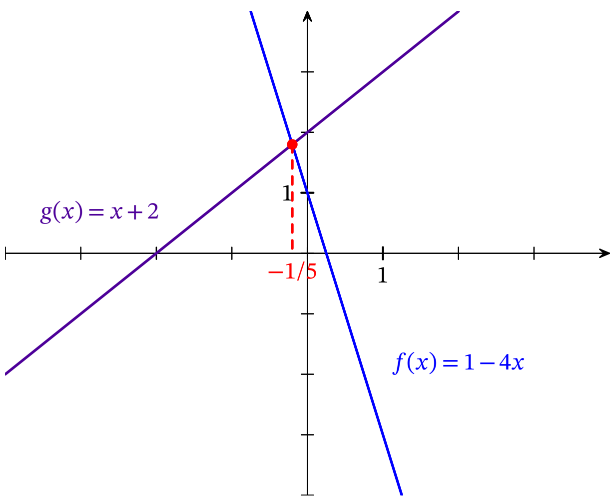
Globalement, de la même manière qu'en résolvant une équation affine, mais sans oublier que **multiplier ou diviser par un nombre négatif change le sens de l'inégalité.**

☞ **Exemple 1 (Résoudre l'inéquation $1-4x \leqslant x+2$)**

$$\begin{aligned}
& 1-4x \leqslant x+2 \\
\iff\ & 1-4x-1 \leqslant x+2-1 \\
\iff\ & -4x \leqslant x+1 \\
\iff\ & -4x-x \leqslant x+1-x \\
\iff\ & -5x \leqslant 1 \\
\iff\ & -\frac{1}{5}\times(-5x) \geqslant -\frac{1}{5}\times 1 \quad \textbf{changement de sens de l'inégalité !} \\
\iff\ & x \geqslant -\frac{1}{5}
\end{aligned}$$

Les solutions de l'inéquation $1-4x \leqslant x+2$ sont donc $S = \left[-\frac{1}{5};+\infty\right[$.

Illustration graphique de la résolution de l'inéquation :



On peut aussi appliquer le cours : on connaît le signe d'une expression affine du type $mx+p$:

Proposition 2.1 (Signe d'une fonction affine) — *Soit f une fonction affine définie par $f(x) = mx+p$ pour tout réel x.*
Le signe de f dépend du signe de m et de la valeur $-\frac{p}{m}$.

- *Si $m > 0$:*

x	$-\infty$		$-\frac{p}{m}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

- *Si $m < 0$:*

x	$-\infty$		$-\frac{p}{m}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

- *Si $m = 0$, f est de signe constant (égal au signe de p) car $\forall x \in \mathbf{R},\quad f(x) = p$.*

☞ **Exemple 2 (Résoudre l'inéquation $2x+5 > 0$)** On peut appliquer le cours, le signe de $2x+5$ est donné par :

- le coefficient directeur de $2x+5$ qui est ici 2, donc strictement positif ;
- la valeur $-\frac{p}{m} = -\frac{5}{2}$:

x	$-\infty$		$-\frac{5}{2}$		$+\infty$
$2x+5$		$-$	0	$+$	

Donc l'inéquation $2x+5 > 0$ a pour solutions $S = \left]-\frac{5}{2};+\infty\right[$.

Remarque 1 Cela va tout aussi vite de résoudre à la main l'inéquation :

$$\begin{aligned}
2x+5 &> 0 \\
2x &> -5 \\
x &> -\frac{5}{2}
\end{aligned}$$

2 Inéquation quelconque

Méthode 2.2

Comment résoudre une inéquation ?

Dans le cas où on ne puisse pas isoler x, on peut souvent procéder appliquant la proposition suivante et en utilisant un **tableau de signe** :

Proposition 2.2 — *Le signe d'un produit est donné par le nombre de facteurs négatifs de ce produit :*

- *si le nombre de facteurs négatifs est pair, le produit est positif ;*
- *si le nombre de facteurs négatifs est impair, le produit est négatif.*

Remarque 2 Remarquez qu'on a donc besoin de factoriser l'expression et de la comparer à 0 pour se ramener à l'étude du signe d'un produit.

☞ **Exemple 3 (Résoudre l'inéquation $(x^2+1)(3x-4)(1-x) \leqslant 0$)** On a trois facteurs :
- x^2+1 qui est toujours strictement positif car pour tout réel x,

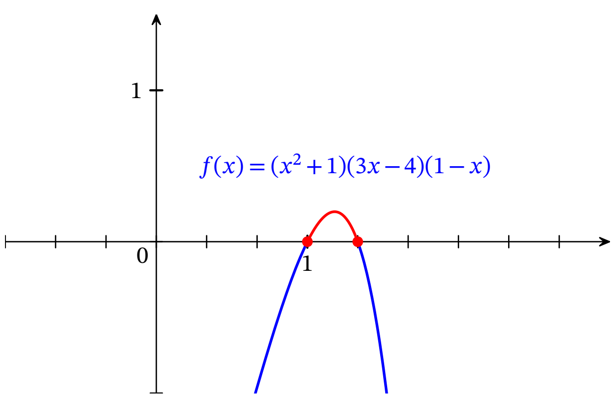
  $x^2 \geqslant 0$ donc $x^2+1 > 0$
- $3x-4$ dont on connait le signe par la proposition 1.2 ;
- de même pour $1-x$.

On fait donc un tableau de signe :

x	$-\infty$		1		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
Signe de x^2+1		$+$		$+$		$+$	
Signe de $3x-4$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $1-x$		$+$	0	$-$		$-$	
Signe de $(x^2+1)(3x-4)(1-x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Ainsi, les solutions de l'inéquation $(x^2+1)(3x-4)(1-x) \leqslant 0$ sont $S =]-\infty;1] \cup \left[\frac{4}{3};+\infty\right[$.

Illustration graphique de la résolution de l'inéquation :



Et que se passe-t-il lorsqu'on a un quotient ? Et bien, cela fonctionne de la même façon qu'un produit, à ceci près que les valeurs pour lesquelles le dénominateur s'annule sont des **valeurs interdites** du quotient.

☞ **Exemple 4 (Résoudre l'inéquation $\frac{2-6x}{x-3} \geqslant 0$)** On a deux facteurs :
- $2-6x$;
- $\frac{1}{x-3}$ qui est du signe de $x-3$.

On fait donc un tableau de signe :

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		3		$+\infty$
Signe de $2-6x$		$+$	0	$-$		$-$	
Signe de $x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $\frac{2-6x}{x-3}$		$-$	0	$+$	‖	$-$	

Donc $S = \left[\frac{1}{3};3\right[$.

Un dernier exemple pour la route, où il y a une factorisation à faire avant de pouvoir se lancer dans un tableau de signe :

☞ **Exemple 5 (Résoudre $\frac{2}{x+1} \leqslant \frac{5x}{2-x}$)**

$$
\begin{aligned}
& \frac{2}{x+1} \leqslant \frac{x}{2-x} \\
\iff \quad & \frac{2}{x+1} - \frac{x}{2-x} \leqslant 0 \\
\iff \quad & \frac{2(2-x)-x(x+1)}{(x+1)(2-x)} \leqslant 0 \\
\iff \quad & \frac{-x^2-3x+4}{(x+1)(2-x)} \leqslant 0 \\
\iff \quad & \frac{(1-x)(x+4)}{(x+1)(2-x)} \leqslant 0 \qquad \text{voir remarque}
\end{aligned}
$$

S'ensuit un grand tableau de signe :

x	$-\infty$		-4		-1		1		2		$+\infty$
Signe de $1-x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
Signe de $x+4$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
Signe de $x+1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
Signe de $2-x$		$+$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
Signe de $\frac{(1-x)(x+4)}{(x+1)(2-x)}$		$+$	0	$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$	

D'où l'on déduit les solutions de l'inéquation :
$S = [-4;-1[\cup [1;2[$.

Remarque 3 Cette année, ce passage pour factoriser $-x^2-3x+4$ en $(1-x)(x+4)$ sera donné dans l'énoncé : on ne vous demandera pas de le trouver vous-même.