

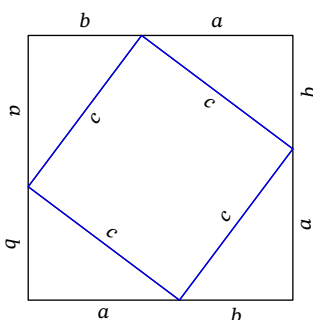
Fiche 10 | Théorème de Pythagore

1 Énoncé

Théorème 10.1 (Pythagore) — Si un triangle est rectangle alors le carré de la longueur du plus grand côté est égal à la somme des carrés des deux autres côtés de ce triangle.

Remarque 1 Si un triangle est rectangle, le plus grand côté est appelé l'**hypoténuse** du triangle.

DÉMONSTRATION (visuelle... détails en classe) :

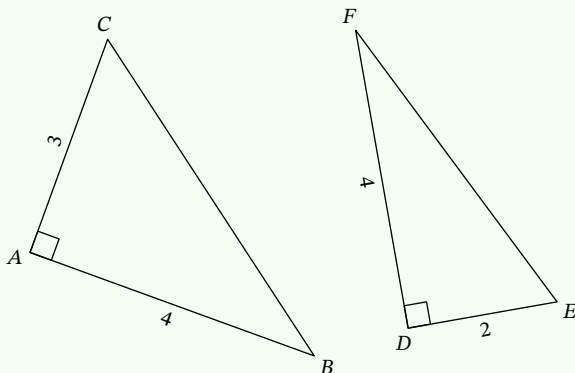


Théorème 10.2 (Pythagore, version ABC) — Si un triangle ABC est rectangle en A alors :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2.$$

Cette égalité est appelée **égalité de Pythagore**.

Exemple 1 (Des triangles rectangles) Voici deux triangles rectangles. Peut-on connaître la longueur de leurs hypoténuses ?



2 Calculs de longueurs

Un intérêt du théorème de Pythagore est qu'il permet de calculer des longueurs dans le plan :

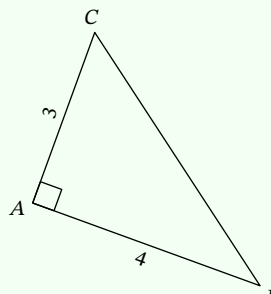
Méthode 10.1

Comment calculer la longueur de l'hypoténuse ?

On reprend les triangles de l'exemple précédent.

Exemple 2

Calcul de la longueur BC :



ABC est rectangle en A donc, d'après le théorème de Pythagore,

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

$$BC^2 = 3^2 + 4^2$$

$$BC^2 = 9 + 16$$

$$BC^2 = 25$$

Or BC est une longueur, donc un nombre **positif**, donc

$$BC = \sqrt{25} = 5.$$

Exemple 3

Calcul de la longueur EF :

DEF est rectangle en D donc, d'après le théorème de Pythagore,

$$EF^2 = DE^2 + DF^2$$

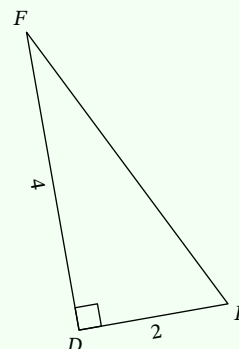
$$EF^2 = 2^2 + 4^2$$

$$EF^2 = 4 + 16$$

$$EF^2 = 20$$

Or EF est une longueur, donc un nombre **positif**, donc

$$EF = \sqrt{20} \approx 4,47.$$



Remarque 2 Attention, dans l'exemple 3, la valeur exacte de la longueur EF vaut $\sqrt{20}$, qui n'est pas égal à 4,47. 4,47 n'est qu'une **valeur approchée** de la longueur EF.

Et si on doit calculer la longueur d'un côté qui n'est pas l'hypoténuse ? Et bien, on utilise le même théorème... En faisant attention à l'égalité qui en découle.

Méthode 10.2

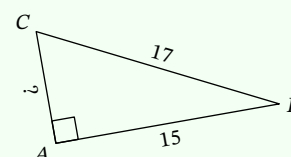
Comment calculer la longueur d'un côté qui n'est pas l'hypoténuse ?

Exemple 4

Calcul de la longueur AC dans le triangle suivant :

ABC est rectangle en A donc, d'après le théorème de Pythagore,

$$AB^2 + AC^2 = BC^2$$



Autrement dit :

$$\begin{aligned}15^2 + AC^2 &= 17^2 \\225 + AC^2 &= 289 \\AC^2 &= 289 - 225 \\AC^2 &= 64\end{aligned}$$

Or AC est une longueur, donc un nombre **positif**, donc

$$AC = \sqrt{64} = 8.$$

Pour le prochain exemple, on remarquera que si a est un nombre positif, alors $(\sqrt{a})^2 = a$.

Exemple 5

Un autre exemple où $AC = \sqrt{75}$:

ABC est rectangle en A donc, d'après le théorème de Pythagore,

$$AB^2 + AC^2 = BC^2$$

Autrement dit :

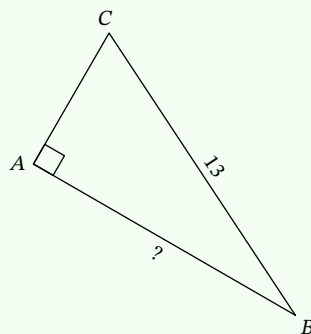
$$AB^2 + (\sqrt{75})^2 = 13^2$$

$$AB^2 + 75 = 169$$

$$AB^2 = 169 - 75$$

$$AB^2 = 94$$

Or AB est une longueur, donc un nombre **positif**, donc $AB = \sqrt{94} \approx 9,7$.



3 La réciproque du théorème de Pythagore

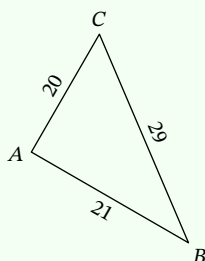
Il se trouve que la réciproque du théorème de Pythagore est vraie... La voici :

Théorème 10.3 (réciproque du théorème de Pythagore) — Si dans un triangle, le carré de la longueur du plus grand côté est égal à la somme des carrés des deux autres côtés de ce triangle, alors ce triangle est rectangle.

Méthode 10.3

Comment démontrer qu'un triangle est rectangle avec les longueurs ?

Exemple 6 Le triangle ABC ci-dessous est-il rectangle ?



Le plus grand côté du triangle est BC donc si le triangle est rectangle, c'est en A .

On calcule **séparément** :

$$BC^2 = 29^2$$

$$BC^2 = 841$$

$$AB^2 + AC^2 = 20^2 + 21^2$$

$$AB^2 + AC^2 = 400 + 441$$

$$AB^2 + AC^2 = 841$$

Ainsi, l'égalité de Pythagore est vérifiée : $AB^2 + AC^2 = BC^2$. D'après la **réciproque** du théorème de Pythagore, le triangle ABC est donc rectangle en A .

4 La contraposée du théorème de Pythagore

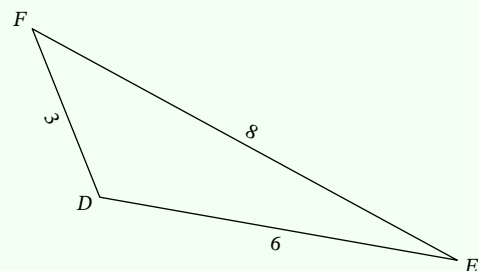
La contraposée du théorème de Pythagore est aussi vraie, car la contraposée d'une proposition vraie est toujours vraie.

Théorème 10.4 (contraposée du théorème de Pythagore) — Si dans un triangle, le carré de la longueur du plus grand côté n'est pas égal à la somme des carrés des deux autres côtés de ce triangle, alors ce triangle n'est pas rectangle.

Méthode 10.4

Comment démontrer qu'un triangle n'est pas rectangle avec les longueurs ?

Exemple 7 Le triangle DEF ci-dessous est-il rectangle ?



Le plus grand côté du triangle est EF donc si le triangle est rectangle, c'est en D .

On calcule **séparément** :

$$EF^2 = 8^2$$

$$EF^2 = 64$$

$$DE^2 + DF^2 = 6^2 + 3^2$$

$$DE^2 + DF^2 = 36 + 9$$

$$DE^2 + DF^2 = 45$$

Ainsi, l'égalité de Pythagore n'est pas vérifiée :

$$DE^2 + DF^2 \neq EF^2.$$

D'après la **contraposée** du théorème de Pythagore, le triangle DEF n'est pas rectangle.

Remarque 3 Le triangle DEF du dernier exemple n'est rectangle en aucun point sommet (d'où l'intérêt de préciser le plus grand côté : pas besoin de vérifier pour chaque sommet!).