

Fiche 13 | Nombres rationnels

1 Définitions, vocabulaire

Définition 1 — Tout **quotient** peut être écrit sous la forme d'une **écriture fractionnaire**. Si a et b sont deux nombres tels que $b \neq 0$:

$$a \div b = \frac{a}{b}$$

a est appelé le **numérateur**, b est appelé le **dénominateur**.

Exemple 1

- $3 \div 4 = \frac{3}{4}$;
- $9,5 \div (-4) = \frac{9,5}{-4}$;
- $-2 \div 5 = \frac{-2}{5}$;
- $-12,5 \div (-5,3) = \frac{-12,5}{-5,3}$.

Définition 2 — Lorsque a et b sont des nombres entiers, $\frac{a}{b}$ est appelé une **fraction**. On dit aussi que $\frac{a}{b}$ est un nombre **rationnel**.

Exemple 2

- $\frac{5}{4}$ **est** une fraction ;
- $\frac{5,1}{2}$ **n'est pas** une fraction.

Remarque 1 Un nombre qui peut s'écrire sous la forme $\frac{a}{b}$ est appelé nombre **rationnel**. Il existe des nombres non rationnels (on dit **irrationnels**).

π est un exemple de nombre irrationnel. Il est en général difficile de démontrer qu'un nombre est irrationnel !

2 Règles des signes

Remarque 2 Les règles concernant le signe des quotients sont applicables aux écriture fractionnaires.

Exemple 3

- $\frac{-3}{4} = \frac{3}{-4} = -\frac{3}{4}$;
- $\frac{-2,5}{-8,2} = \frac{2,5}{8,2}$.

3 Égalité entre deux quotients

Proposition 13.1 — On ne change pas la valeur d'un quotient **en multipliant ou divisant son numérateur et son dénominateur par un même nombre non nul**.

Exemple 4

- $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{20}{30}$;
- $\frac{-3}{4} = \frac{-1,5}{2}$.

Proposition 13.2 (produits en croix) — Soient a , b , c et d quatre nombres tels que $b \neq 0$ et $d \neq 0$. Alors :

• Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, alors $a \times d = b \times c$

• Réciproquement, si $a \times d = b \times c$, alors $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

Exemple 5

- $\frac{2,6}{5,4} \neq \frac{7,2}{9,5}$ car $2,6 \times 9,5 = 24,7$ et $5,4 \times 7,2 = 38,88$.
- $\frac{45}{63} = \frac{9\,675}{13\,545}$ car $45 \times 13\,545 = 609\,525$ et $63 \times 9\,675 = 609\,525$.

4 Simplification de fractions

Définition 3 — **Simplifier** une fraction, c'est l'écrire avec un **dénominateur positif plus petit**.

Exemple 6

$\frac{24}{60} = \frac{24 \div 2}{60 \div 2} = \frac{12}{30} = \frac{12 \div 2}{30 \div 2} = \frac{6}{15} = \frac{6 \div 3}{15 \div 3} = \frac{2}{5}$
Ainsi, $\frac{2}{5}$ est l'écriture simplifiée au maximum de $\frac{24}{60}$ (on dit aussi **écriture irréductible**).

Remarque 3 Il faut connaître les **critères de divisibilité** pour simplifier facilement les fractions.

5 Critères de divisibilité

Un entier est divisible par ...	Si ...
2	...son chiffre des unités est 0, 2, 4, 6 ou 8
3	...la somme de ses chiffres est divisible par 3
4	...le nombre formé par ses deux derniers chiffres est divisible par 4
5	...son chiffre des unités est 0 ou 5
9	...la somme de ses chiffres est divisible par 9

6 Somme de fractions

Méthode 13.1

Comment additionner deux fractions ?

Pour ajouter deux fractions :

- on les écrit au **même dénominateur**,
- on ajoute ensuite les numérateurs.

Exemple 7

$$\begin{aligned} \bullet \frac{7}{2} + \frac{3}{4} &= \frac{7 \times 2}{2 \times 2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} + \frac{2}{5} = \frac{3 \times 5}{4 \times 5} + \frac{2 \times 4}{5 \times 4} \\ &= \frac{14}{4} + \frac{3}{4} = \frac{15}{20} + \frac{8}{20} \\ &= \frac{17}{4} = \frac{23}{20} \end{aligned}$$

7 Différence de fractions**Méthode 13.2**

Comment soustraire une fraction à une autre ?

Pour soustraire une fraction à une autre :

- on les écrit au **même dénominateur**,
- on ajoute l'opposée de la fraction que l'on soustrait.

Exemple 8

$$\begin{aligned} \bullet \frac{8}{3} - \frac{1}{6} &= \frac{8 \times 2}{3 \times 2} - \frac{1}{6} \cdot \frac{7}{5} - \frac{-3}{8} = \frac{7 \times 8}{5 \times 8} - \frac{-3 \times 5}{8 \times 5} \\ &= \frac{16}{6} - \frac{1}{6} = \frac{56}{40} - \frac{-15}{40} \\ &= \frac{15}{6} = \frac{71}{40} \end{aligned}$$

8 Produit de fractions

Proposition 13.3 — Pour multiplier deux fractions, on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.

Exemple 9

$$\begin{aligned} \bullet \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} &= \frac{2 \times 3}{5 \times 4} \cdot \frac{5}{3} \times \frac{-3}{7} = \frac{5 \times (-3)}{3 \times 7} \\ &= \frac{6}{20} = \frac{-15}{21} \end{aligned}$$

9 Inverse d'un nombre relatif non nul

Définition 4 — L'inverse d'un nombre relatif non nul x est le nombre qui, multiplié par x , donne 1.

Exemple 10

- $5 \times 0,2 = 1$ donc l'inverse de 5 est 0,2.
- $-4 \times (-0,25) = 1$ donc l'inverse de -0,25 est -4.

Proposition 13.4 — L'inverse d'un nombre relatif non nul α est le nombre $\frac{1}{\alpha}$ car

$$\alpha \times \frac{1}{\alpha} = \frac{\alpha}{\alpha} = \alpha \div \alpha = 1.$$

Exemple 11

- L'inverse de 8 est $\frac{1}{8} = 0,125$;
- l'inverse de -6 est $\frac{1}{-6} \approx -0,17$;
- L'inverse de 5,2 est $\frac{1}{5,2}$.

Proposition 13.5 — Si a et b sont deux nombres relatifs non nuls, alors l'inverse de $\frac{a}{b}$ est le nombre $\frac{b}{a}$. En effet :

$$\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = \frac{a \times b}{b \times a} = 1.$$

Exemple 12

- L'inverse de $\frac{3}{5}$ est $\frac{5}{3}$.
- L'inverse de $\frac{-2}{6}$ est $\frac{6}{-2}$.

10 Quotient de fractions

Proposition 13.6 — Diviser par un nombre relatif non nul revient à multiplier par son inverse.

Exemple 13

$$\begin{aligned} \bullet \frac{7}{5} \div 2 &= \frac{7}{5} \times \frac{1}{2} \cdot \frac{-5}{3} \div \frac{6}{7} = \frac{-5}{3} \times \frac{7}{6} \\ &= \frac{7}{10} = \frac{-35}{18} \end{aligned}$$