

Fiche 18 | Puissances

I - Puissances entières d'un nombre positif

1 Puissances positives

Soit a un nombre réel et n un entier positif supérieur ou égal à 1.

Définition 1 — a^n est le produit de n facteurs égaux à a :

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ facteurs}}$$

Exemple 1

- $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$
- $5^2 = 5 \times 5 = 25$
- $(-3)^4 = (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) = 81$
- $7,1^3 = 7,1 \times 7,1 \times 7,1 = 357,911$

Conventions : si a est un nombre relatif alors

- $a^0 = 1$;
- a^2 se lit "a au carré";
- a^3 se lit "a au cube".

2 Puissances négatives

Définition 2 — Si a est un nombre relatif non nul et n un entier positif alors : l'inverse de a^n est noté a^{-n} : $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Exemple 2

- $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$
- $5^{-4} = \frac{1}{5^4} = \frac{1}{625}$

II - Puissances de dix

1 Cas particulier où $a = 10$

En utilisant les notations précédentes :

$$10^n = \underbrace{10 \times 10 \times \dots \times 10}_{n \text{ fois}} = 1 \underbrace{000 \dots 000}_{n \text{ zéros}}$$

$$10^{-n} = \frac{1}{\underbrace{10 \times 10 \times \dots \times 10}_{n \text{ fois}}} = \underbrace{0,000 \dots 001}_{n \text{ zéros}}$$

Exemple 3

- $10^5 = 100\,000$
- $10^{-3} = 0,001$

2 Propriétés

Proposition 18.1 — Si a et b désignent des réels, m et p désignent des entiers relatifs alors :

- $a^m \times a^p = a^{m+p}$
- $\frac{a^m}{a^p} = a^{m-p}$
- $(a^m)^p = a^{m \times p}$
- $(ab)^m = a^m b^m$.

Exemple 4

- $10^3 \times 10^5 = 10^{3+5} = 10^8$
- $(2^3)^8 = 2^{3 \times 8} = 2^{24}$
- $\frac{8^6}{8^2} = 8^{6-2} = 8^4$
- $15^7 = (3 \times 5)^7 = 3^7 \times 5^7$

3 Préfixes scientifiques

Préfixe	giga	méga	kilo	milli	micro	nano
Symbole	G	M	k	m	μ	n
Signification	10^9	10^6	10^3	10^{-3}	10^{-6}	10^{-9}

Exemple 5

- Un Gigaoctet (1 Go) correspond à 10^9 octets soit un milliard d'octets.
- Un microgramme (1 μ g) correspond à 10^{-6} grammes soit un millionième de grammes.

4 Notation scientifique

Définition 3 — La notation scientifique d'un nombre décimal positif est la seule écriture de ce nombre de la forme $a \times 10^n$ où $1 \leq a < 10$ et n est un entier relatif.

Exemple 6

Nombre	a	n	Notation scientifique
14 340 000	1,434	7	$1,434 \times 10^7$
0,012 31	1,231	-2	$1,231 \times 10^{-2}$
540 002,3	5,400023	5	$5,400023 \times 10^5$