



FONCTION DE TRANSFERT ET SCHÉMA-BLOCS

Cours 2

Professeur: Y. FARTOUH

v1.1

CPGE - MARRAKECH

1 Un outil : la transformée de Laplace

La transformée de Laplace constitue un outil mathématique largement utilisé en ingénierie pour l'étude des systèmes linéaires, continus et invariants. Son utilisation permet :

- de manipuler aisément les équations différentielles de comportement des systèmes ;
- de résoudre facilement les équations différentielles pour des entrées simples ;
- d'obtenir les performances des systèmes sans calculer la réponse temporelle.

1.1 Définition



Définition Transformée de Laplace

Soit f une fonction de la variable t (le temps) définie sur $\mathbb{R}$.

Sous réserve d'existence, on note $F(p)$ la transformée de Laplace $\mathcal{L}[f(t)]$ de la fonction $f(t)$:

$$f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(p) = \int_{t=0^-}^{\infty} f(t)e^{-pt} dt$$

avec p une variable complexe, appelée **variable de Laplace**.

p est une variable tout à fait symbolique puisqu'elle ne prendra aucune valeur pour application numérique.

Ces fonctions f représentent des grandeurs physiques : intensité, température, effort, vitesse... **Dans les cas rencontrés en ingénierie, les conditions d'existence de la transformée sont toujours réunies.**



Remarque Notation

Dans les pays anglo-saxons, la variable de Laplace est souvent notée s , pour *symbolic variable*. Les logiciels de simulation Scilab et Matlab utilisent cette notation.

Exemple : Transformée de Laplace d'un échelon d'amplitude e_0 causal

On applique la définition pour déterminer la transformée de Laplace de $e(t) = e_0 u(t)$.

$$E(p) = \int_{0^-}^{\infty} e_0 u(t) e^{-pt} dt = e_0 \left[\frac{e^{-pt}}{-p} \right]_0^{\infty} = \frac{e_0}{p}$$

**Définition** *Conditions de Heaviside*

une fonction du temps $f(t)$ vérifie les conditions de Heaviside si elle vérifie : $f(0^-) = 0$, $\dot{f}(0^-) = 0$, $\ddot{f}(0^-) = 0 \dots$ c'est à dire si les **conditions initiales sont nulles** et le système au repos pour $t < 0$.

1.2 Propriétés

Les propriétés sont démontrées sur la transformation directe de Laplace $\mathcal{L}$. Les propriétés de la transformation inverse $\mathcal{L}^{-1}$ seront simplement énoncées.

**Propriété** *Unicité*

À une fonction $f(t)$ du domaine **temporel** correspond une fonction $F(p)$ unique du domaine de **Laplace**. De même, à une fonction $F(p)$ du domaine de Laplace correspond une unique fonction $f(t)$ du domaine temporel. La transformation est dite *bi-univoque*.

$$F(p) = \mathcal{L}[f(t)] \quad f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(p)]$$

Démonstration :

Soient $F_1(p)$ et $F_2(p)$ les transformées de Laplace de la fonction $f(t)$, alors :

$$F_1(p) - F_2(p) = \int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-pt} dt - \int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-pt} dt = \int_{0^-}^{\infty} (f(t) - f(t))e^{-pt} dt = \int_{0^-}^{\infty} 0 dt = 0$$

**Propriété** *Linéarité*

La transformée de Laplace est linéaire : $\forall \mu$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\lambda f(t) + \mu g(t)] &= \lambda \mathcal{L}[f(t)] + \mu \mathcal{L}[g(t)] \\ \mathcal{L}^{-1}[\lambda F(p) + \mu G(p)] &= \lambda \mathcal{L}^{-1}[F(p)] + \mu \mathcal{L}^{-1}[G(p)] \end{aligned}$$

Démonstration :

Soient $f(t)$ et $g(t)$ deux fonctions. Soient μ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\lambda f(t) + \mu g(t)] &= \int_{0^-}^{\infty} (\lambda f(t) + \mu g(t))e^{-pt} dt \\ &= \lambda \int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-pt} dt + \mu \int_{0^-}^{\infty} g(t)e^{-pt} dt \quad (\text{par linéarité de l'intégrale}) \\ &= \lambda \mathcal{L}[f(t)] + \mu \mathcal{L}[g(t)] \end{aligned}$$

**Propriété Transformée d'une dérivée**

La transformée de Laplace de la dérivée de la fonction $f(t)$ conduit à :

$$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = pF(p) - f(0^-) \qquad \mathcal{L}\left[\frac{d^2f(t)}{dt^2}\right] = p^2F(p) - pf(0^-) - \dot{f}(0^-)$$

Démonstration :

Par intégration par partie (IPP),

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] &= \int_{0^-}^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-pt} dt \underset{IPP}{=} [f(t)e^{-pt}]_{0^-}^{\infty} + \int_{0^-}^{\infty} pf(t)e^{-pt} dt = pF(p) - f(0^-) \\ \mathcal{L}\left[\frac{d^2f(t)}{dt^2}\right] &= \int_{0^-}^{\infty} \frac{d^2f(t)}{dt^2} e^{-pt} dt \underset{IPP}{=} \left[\frac{df(t)}{dt} e^{-pt}\right]_{0^-}^{\infty} + \int_{0^-}^{\infty} p \frac{df(t)}{dt} e^{-pt} dt \\ &= p^2F(p) - pf(0^-) - \dot{f}(0^-) \end{aligned}$$

**Remarque**

Dans les conditions de Heaviside, **dériver** dans le domaine temporel revient à **multiplier par p** dans le domaine symbolique de Laplace.

**Propriété Transformée d'une intégrale**

La transformée de Laplace la primitive de la fonction $f(t)$ qui s'annule en 0 conduit à :

$$\mathcal{L}\left[\int_{0^-}^t f(\tau) d\tau\right] = \frac{F(p)}{p}$$

Démonstration :

$$\mathcal{L}\left[\int_{0^-}^t f(\tau) d\tau\right] = \int_{0^-}^{\infty} \int_{0^-}^t f(\tau) d\tau e^{-pt} dt = \left[\int_{0^-}^t f(\tau) d\tau \frac{e^{-pt}}{-p}\right]_{0^-}^{\infty} + \int_{0^-}^{\infty} \frac{f(t)}{p} e^{-pt} dt = \frac{F(p)}{p}$$

**Remarque**

Dans les conditions de Heaviside, **intégrer** dans le domaine temporel revient à **diviser par p** dans le domaine symbolique de Laplace.

**Propriété** *Théorème de la valeur initiale*

La valeur initiale $f(0^-)$ d'une fonction peut se calculer à l'aide de la transformée de Laplace :

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} pF(p)$$

Démonstration :

La propriété de dérivation s'écrit : $\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = \int_{0^-}^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-pt} dt = pF(p) - f(0^-)$

En considérant la limite de cette expression quand $p \rightarrow \infty$:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \underbrace{\int_{0^-}^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-pt} dt}_{\rightarrow 0} = \lim_{p \rightarrow \infty} pF(p) - f(0^-) = 0$$

D'où le résultat : $\lim_{p \rightarrow \infty} pF(p) = f(0^-) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t)$.

**Remarque**

Ce théorème n'est valable que dans le cas où la fonction $F(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$ est telle que $\deg(N) \leq \deg(D)$, ce qui est toujours le cas pour un système causal.

**Propriété** *Théorème de la valeur finale*

Sous réserve d'existence, la valeur à convergence d'une fonction $f(t)$ peut se calculer à l'aide de la transformée de Laplace :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pF(p)$$

Démonstration :

On a $\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = \int_{0^-}^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-pt} dt = pF(p) - f(0^-)$

On prend la limite quand $p \rightarrow 0$: $\lim_{p \rightarrow 0} \int_{0^-}^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-pt} dt = \lim_{p \rightarrow 0} pF(p) - f(0^-)$

Or $\lim_{p \rightarrow 0} \int_{0^-}^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-pt} dt = [f(t)]_{0^-}^{\infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) - f(0^-)$

D'où $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) - f(0^-) = \lim_{p \rightarrow 0} pF(p) - f(0^-)$ et donc : $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pF(p)$

**Remarque**

Ce théorème n'est valable que si les pôles de $pF(p)$ sont à partie réelle strictement négative. Sinon $f(t)$ n'admet pas de limite finie. **Attention**, l'utilisation du théorème de la valeur finale **dans le cas d'un système instable** conduit à un **résultat faux** qui pourrait sembler cohérent.

**Propriété Théorème du retard**

Soit g la fonction retardée d'une fonction f d'un temps τ : $g(t) = f(t - \tau)$. La transformée de Laplace de la fonction g est :

$$\mathcal{L}[f(t - \tau)] = e^{-p\tau} \mathcal{L}[f(t)] = e^{-p\tau} F(p)$$

Démonstration :

$$\mathcal{L}[g(t)] = \mathcal{L}[f(t - \tau)] = \int_{0^-}^{\infty} f(t - \tau) e^{-pt} dt$$

Soit le changement de variable $T = t - \tau$, $dt = dT$, $t = T + \tau$ et $\begin{cases} t = 0 \\ t \rightarrow \infty \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T = -\tau \\ T \rightarrow \infty \end{cases}$

L'expression s'écrit alors :

$$\mathcal{L}[g(t)] = \mathcal{L}[f(T)] = \int_{-\tau}^{\infty} f(T) e^{-p(T+\tau)} dT = e^{-p\tau} \int_{-\tau}^{\infty} f(T) e^{-pT} dT$$

Sachant que $f(T)$ est nulle sur $[-\tau, 0]$, l'expression conduit au résultat : $G(p) = e^{-p\tau} F(p)$

Exemple : Transformation de Laplace d'une équation différentielle à coefficients constants

On applique la transformation de Laplace à l'équation différentielle obtenue pour le moteur à courant continu :

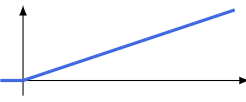
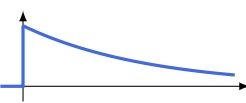
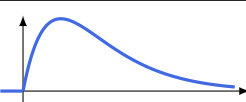
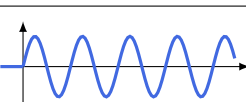
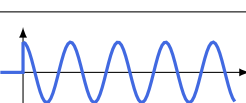
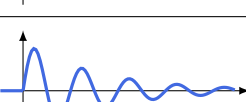
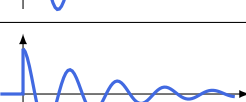
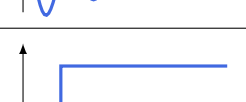
$$u_m(t) = k\omega_m(t) + \frac{RJ}{k} \left(\frac{d\omega_m(t)}{dt} \right) + \frac{LJ}{k} \left(\frac{d^2\omega_m(t)}{dt^2} \right)$$

Dans le domaine de Laplace, on obtient pour chaque terme de l'équation :

$$\begin{aligned} \bullet \mathcal{L}[u_m(t)] &= U_m(p) & \bullet \mathcal{L}[k\omega_m(t)] &= k\Omega_m(p) \\ \bullet \mathcal{L}\left[\frac{RJ}{k} \frac{d\omega_m(t)}{dt}\right] &= \frac{RJ}{k} p\Omega_m(p) & \bullet \mathcal{L}\left[\frac{LJ}{k} \frac{d^2\omega_m(t)}{dt^2}\right] &= d\frac{JL}{k} p^2\Omega_m(p) \end{aligned}$$

En regroupant les termes : $U_m(p) = \left(k + \frac{RJ}{k} p + \frac{JL}{k} p^2 \right) \Omega_m(p)$

1.3 Tableaux des transformées de Laplace usuelles

	$x(t)$	$X(p)$
	Impulsion de Dirac : $\delta(t)$	1
	Échelon d'amplitude A : $A u(t)$	$\frac{A}{p}$
	Rampe de pente b : $bt u(t)$	$\frac{b}{p^2}$
	$e^{-at} u(t)$	$\frac{1}{p+a}$
	$te^{-at} u(t)$	$\frac{1}{(p+a)^2}$
	$\sin(\omega t) u(t)$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$
	$\cos(\omega t) u(t)$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$
	$e^{-at} \sin(\omega t) u(t)$	$\frac{\omega}{(p+a)^2 + \omega^2}$
	$e^{-at} \cos(\omega t) u(t)$	$\frac{p+a}{(p+a)^2 + \omega^2}$
	Retard : $f(t-T) u(t)$	$e^{-T} F(p)$

2 Notion de fonction de transfert

Le modèle mathématique (ou modèle dynamique) d'un système monovariable, linéaire, continu et invariant peut être décrit par une équation différentielle linéaire (avec a_i et b_i coefficients constants appartenant à $\mathbb{R}$) :

$$a_0 s(t) + a_1 \frac{ds(t)}{dt} + \dots + a_n \frac{d^n s(t)}{dt^n} = b_0 e(t) + b_1 \frac{de(t)}{dt} + \dots + b_m \frac{d^m e(t)}{dt^m}$$



Remarque Causalité

Il faut que $m \leq n$ pour que le système soit physiquement réalisable.

2.1 Définition et obtention de la fonction de transfert

On se place dans les conditions de Heaviside. Après transformation de Laplace, l'équation précédente devient :

$$(a_0 + a_1p + \dots + a_np^n)S(p) = (b_0 + b_1p + \dots + b_mp^m)E(p)$$



Définition *Fonction de transfert*

La **fonction de transfert** ou **transmittance** est la fonction $H(p)$, définie par le rapport de la sortie sur l'entrée, toutes deux exprimées dans le domaine symbolique de Laplace :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$$

$H(p)$ représente le comportement du système indépendamment du signal d'entrée. Connaissant $E(p)$ (signal d'entrée donné!) et $H(p)$ intrinsèque au système étudié, il est simple de déterminer $S(p)$ car $S(p) = H(p)E(p)$. On remarque que la relation entre l'entrée et la sortie dans le domaine de Laplace est bien linéaire.

Le schéma-bloc figure 1 définit une représentation graphique du modèle mathématique du système dans le domaine de Laplace.

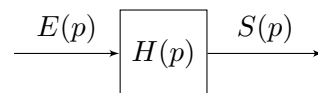


FIGURE 1 – Schéma-bloc dans le domaine de Laplace.

$H(p)$ s'écrit toujours sous la forme d'un quotient de deux polynômes :

$$H(p) = \frac{\sum_{i=0}^m b_i p^i}{\sum_{j=0}^n a_j p^j} = \frac{b_0 + b_1p + \dots + b_mp^m}{a_0 + a_1p + \dots + a_np^n}$$

On appelle alors **pôles** les racines du dénominateur et **zéros** les racines du numérateur. Nous aurons l'occasion d'utiliser les pôles pour l'étude de la stabilité.



Définition *Forme canonique*

La forme canonique d'une fonction de transfert consiste à imposer une constante unitaire aux polynômes pour mettre cette fonction de transfert sous la forme :

$$H(p) = \frac{K}{p^\alpha} \frac{1 + b_1'p + \dots + b_{m'}p^{m'}}{1 + a_1'p + \dots + a_{n'}p^{n'}}$$

avec K le gain (amplification) statique de la fonction de transfert, α la classe du système et $n = n' + \alpha$ l'ordre du système.

2.2 Quelques exemples

2.2.1 Système du premier ordre

Le système est régi par l'équation différentielle : $\tau \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = Ke(t)$ avec les conditions initiales nulles.

Dans le domaine de Laplace, on obtient donc $(\tau p + 1)S(p) = KE(p)$

$$\text{D'où } H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \tau p}$$



Définition *Forme canonique de la fonction de transfert d'un premier ordre*

La fonction de transfert d'un système du premier ordre est sous forme canonique :

$$H(p) = \frac{K}{1 + \tau p}$$

avec τ la constante de temps et K le gain (amplification) statique.

2.2.2 Système du second ordre

Le système est régi par l'équation différentielle $\ddot{s}(t) + 2\xi\omega_0\dot{s}(t) + \omega_0^2 s(t) = K\omega_0^2 e(t)$ avec les conditions initiales nulles.

Dans le domaine de Laplace, on obtient donc $(p^2 + 2\xi\omega_0 p + \omega_0^2)S(p) = K\omega_0^2 E(p)$

$$\text{D'où } H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K\omega_0^2}{p^2 + 2\xi\omega_0 p + \omega_0^2}$$



Définition *Forme canonique de la fonction de transfert d'un second ordre*

La fonction de transfert d'un système du second ordre est sous la forme canonique :

$$H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

avec ω_0 la pulsation propre du système non amorti, ξ le coefficient (facteur) d'amortissement et K le gain (amplification) statique.

2.2.3 Fonction de transfert du moteur à courant continu

Reprenons l'équation qui caractérise le moteur :

$$u_m(t) = k\omega_m(t) + \frac{RJ}{k} \left(\frac{d\omega_m(t)}{dt} \right) + \frac{LJ}{k} \left(\frac{d^2\omega_m(t)}{dt^2} \right)$$

La fonction de transfert est : $H(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U_m(p)} = \frac{1}{k + \frac{RJ}{k}p + \frac{JL}{k}p^2}$

Sous forme canonique, on obtient : $H(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U_m(p)} = \frac{\frac{1}{k}}{1 + \frac{RJ}{k^2}p + \frac{JL}{k^2}p^2}$

Par analyse dimensionnelle (on peut remarquer que p a pour dimension l'inverse d'un temps), on peut poser $\tau_m = \frac{RJ}{k^2}$ et $\tau_e = \frac{L}{R}$, on a alors $H(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U_m(p)} = \frac{\frac{1}{k}}{1 + \tau_m p + \tau_m \tau_e p^2}$

Si on cherche la fonction de transfert $H(p) = \frac{\Theta_m(p)}{U_m(p)}$, (θ est la position angulaire et on a la relation $\omega_m(t) = \dot{\theta}_m(t)$) on obtient : $H(p) = \frac{\Theta_m(p)}{U_m(p)} = \frac{\frac{1}{k}}{p(1 + \tau_m p + \tau_m \tau_e p^2)}$

L'**ordre** de cette fonction de transfert est de **3** et la **classe** est **1**.

3 Représentation par schéma-blocs et fonction de transfert globale d'un système complexe

3.1 Modélisation par schéma-blocs

Nous avons vu qu'un système complexe pouvait être décrit par un schéma-blocs fonctionnel dans lequel les noms des constituants apparaissaient dans des blocs.

Maintenant, nous savons calculer la fonction de transfert de chacun des blocs et nous pouvons construire un schéma-blocs en remplaçant le nom des composants par leur fonction de transfert.



Remarque

Pour un système donné, il existe un unique schéma-blocs fonctionnel, par contre il est possible de faire autant de schéma-blocs que l'on souhaite étant donné que les blocs représentent des équations et peuvent donc être manipulés comme on veut.

Exemple : description de l'asservissement en vitesse d'un bras de robot

Une consigne de vitesse angulaire de rotation ω_c [rad.s⁻¹] est adaptée à l'aide d'un adaptateur de gain K_a en une tension de consigne u_c [V]. Cette tension de consigne est comparée à la tension u_m [V] délivrée par le capteur de type génératrice tachymétrique de gain K_t , proportionnelle à la vitesse angulaire réelle ω [rad.s⁻¹].

L'écart de tension ε [V] est corrigé par un correcteur, représenté par sa fonction de transfert $C(p) = C$, qui fournit la tension de commande u_{com} [V] au variateur de gain K_v pilotant le moteur par une tension u_{mot} [V].

Le moteur, dont la fonction de transfert est notée $H_{mot}(p)$ transforme cette tension en vitesse de rotation ω_{mot} [rad.s⁻¹], puis cette vitesse est réduite par un réducteur de gain K_r pour obtenir la vitesse angulaire de sortie ω [rad.s⁻¹].

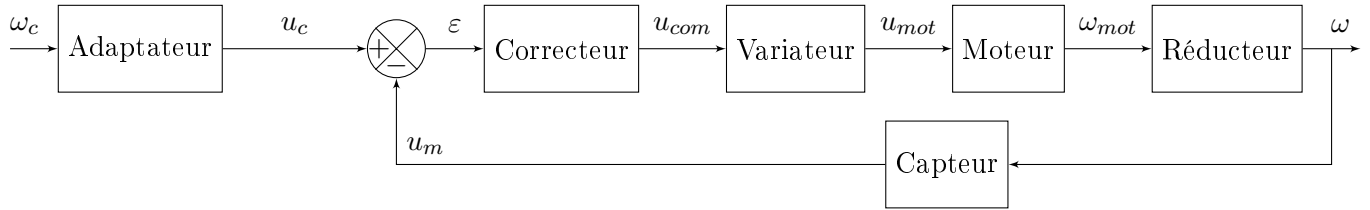


FIGURE 2 – Schéma-blocs fonctionnel de l’asservissement en vitesse d’un bras de robot.

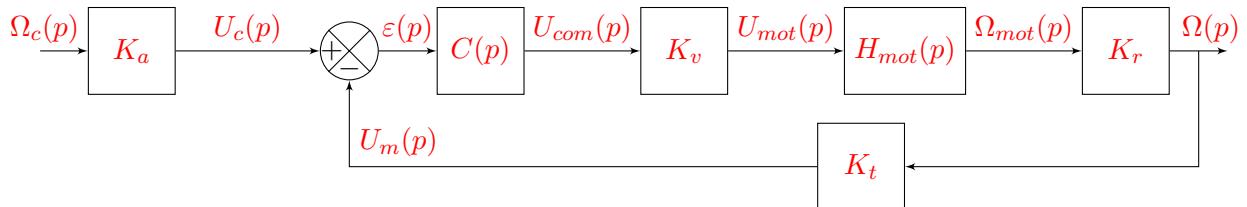


FIGURE 3 – Schéma-blocs de l’asservissement en vitesse angulaire d’un bras de robot.

3.2 Différentes fonctions de transfert

3.2.1 Fonction de transfert en boucle fermée (FTBF) d’un système bouclé



Définition FTBF

Les systèmes asservis étudiés sont généralement représentables par un schéma-blocs avec rétroaction. Pour étudier les performances de ces systèmes, il est nécessaire de déterminer la fonction de transfert globale. Celle-ci est appelée fonction de transfert en boucle fermée :

$$\text{FTBF}(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$$

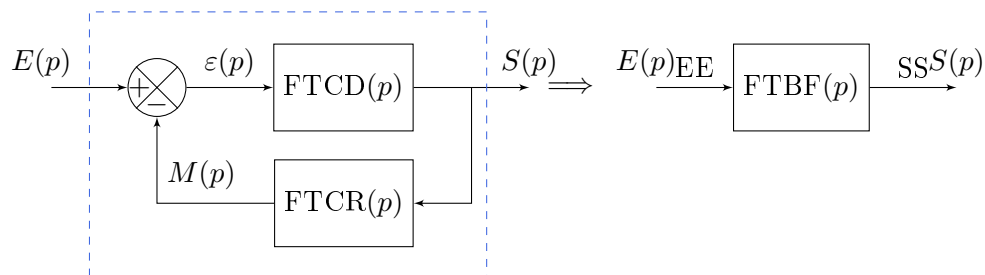


FIGURE 4 – Système bouclé



Définition Formule de Black

Dans le cas d’un système mis sous la forme de la FIGURE 4, la fonction de transfert en boucle fermée est :

$$\text{FTBF}(p) = \frac{\text{FTCD}(p)}{1 + \text{FTCD}(p)\text{FTCR}(p)}$$

FTCD(p) est généralement dénommée fonction de transfert de la **chaîne directe** ou **chaîne d'action** tandis que FTCT(p) est souvent dénommée **chaîne de retour** ou **chaîne de mesure**.

Démonstration :

Méthode élémentaire

Chaque élément graphique du schéma est traduit par son équation pour former un système d'équations à résoudre par substitution.

$$\left. \begin{array}{l} \varepsilon(p) = E(p) - M(p) \\ S(p) = \text{FTCD}(p)\varepsilon(p) \\ M(p) = \text{FTCT}(p)S(p) \end{array} \right\} \Rightarrow \text{FTBF}(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{\text{FTCD}(p)}{1 + \text{FTCD}(p)\text{FTCT}(p)}$$

Méthode analytique

Exprimer la sortie en « remontant » le schéma-blocs ; la présence d'un sommateur se traduit par une ouverture de parenthèse ; toutes les parenthèses sont fermées une fois le schéma-blocs complètement remonté.

$$S(p) = \dots$$

$$S(p) = \text{FTCD}(p) \times (\dots$$

Présence sommateur : ouverture de parenthèse

$$S(p) = \text{FTCD}(p) \times (-\text{FTCT}(p)S(p) + E(p))$$

À la fin : fermeture de toutes les parenthèses

$$S(p) \times (1 + \text{FTCD}(p)\text{FTCT}(p)) = \text{FTCD}(p)E(p)$$

$$\text{FTBF}(p) = \frac{\text{FTCD}(p)}{1 + \text{FTCD}(p)\text{FTCT}(p)}$$

Formule de Black



Remarque

Quand dans un schéma-blocs complexe, une boucle générique comme celle définie ci-dessus apparaît, il est possible de la remplacer par une fonction de transfert globale en utilisant directement la formule de Black. En annexe page ?? et suivantes, des méthodes sont proposées pour modifier un schéma-blocs et le ramener à une structure contenant des boucles génériques.

3.2.2 Fonction de transfert en boucle ouverte (FTBO) d'un système bouclé

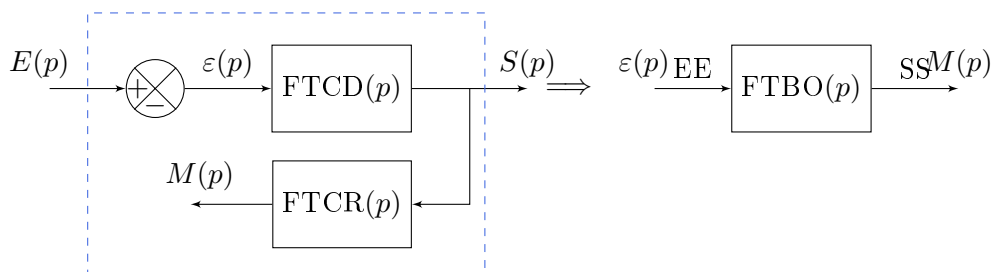


FIGURE 5 – Fonction de transfert en boucle ouverte (FTBO) pour un système bouclé.

**Définition FTBO**

La fonction de transfert en boucle ouverte est définie comme la fonction de transfert du système d'entrée ε , lorsque le retour vers le sommateur est coupé. Elle comprend la chaîne directe FTCD(p) et la chaîne de retour FTCT(p). On note donc :

$$\text{FTBO}(p) = \frac{M(p)}{\varepsilon(p)} = \text{FTCD}(p) \text{FTCT}(p)$$

**Définition Formule de Black**

Dans le cas d'un système mis sous la forme de la FIGURE 4, la fonction de transfert en boucle fermée est :

$$\text{FTBF}(p) = \frac{\text{FTCD}(p)}{1 + \text{FTBO}(p)}$$

3.3 Manipulation des schéma-blocs

3.3.1 Association de blocs en série

Les schéma-blocs présentent souvent des blocs en série que l'on peut réduire dans le cadre du calcul de la fonction de transfert globale du système (FIGURE 6).

**Définition Association de blocs en série**

La fonction de transfert équivalente à l'association en série de plusieurs blocs est égale au **produit** des fonctions de transfert de ces blocs.

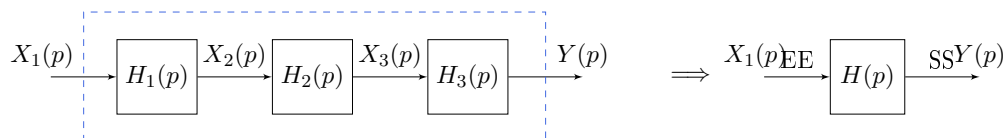


FIGURE 6 – Association de blocs en série.

Démonstration :

$$\left. \begin{array}{l} X_2(p) = H_1(p)X_1(p) \\ X_3(p) = H_2(p)X_2(p) \\ Y(p) = H_3(p)X_3(p) \end{array} \right\} \Rightarrow Y(p) = \underbrace{H_1(p)H_2(p)H_3(p)}_{H(p)} X_1(p)$$

La fonction de transfert globale s'écrit donc : $H(p) = H_1(p)H_2(p)H_3(p)$

3.3.2 Blocs en parallèle

Deux blocs sont dit en parallèle, lorsqu'une grandeur sur un lien se sépare en deux branches pour aller dans deux blocs différents et que la sortie de ces blocs se regroupe à l'aide d'un sommateur pour former une sortie (FIGURE 7).

**Définition** *Blocs en parallèle*

La fonction de transfert équivalente à plusieurs blocs en parallèle est égale à la somme des fonctions de transfert de ces blocs, affectée des signes du sommateur.

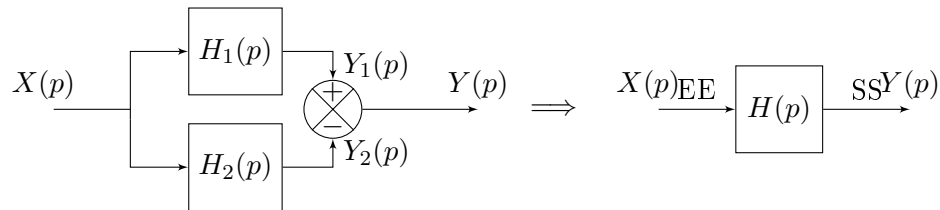
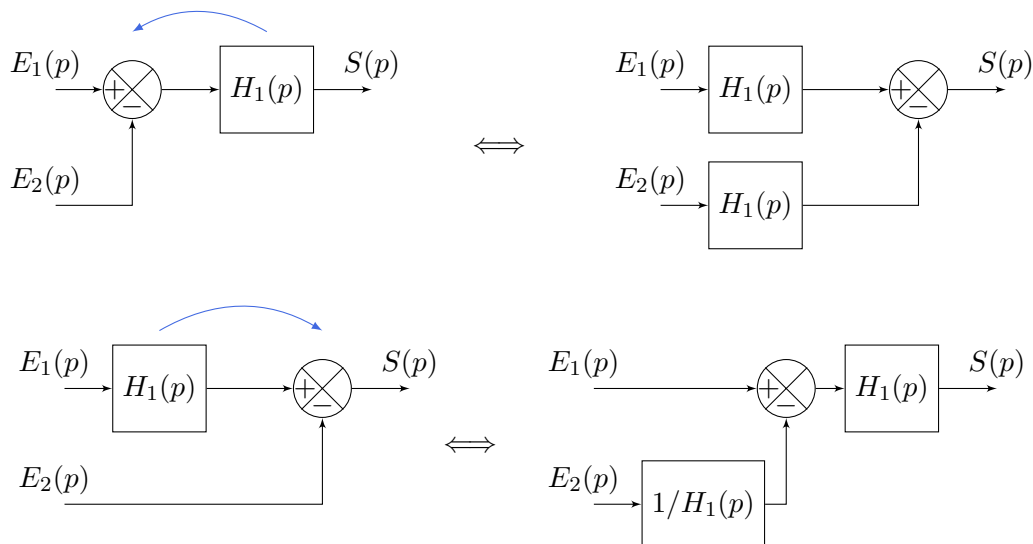


FIGURE 7 – Association de blocs en parallèle.

Démonstration :

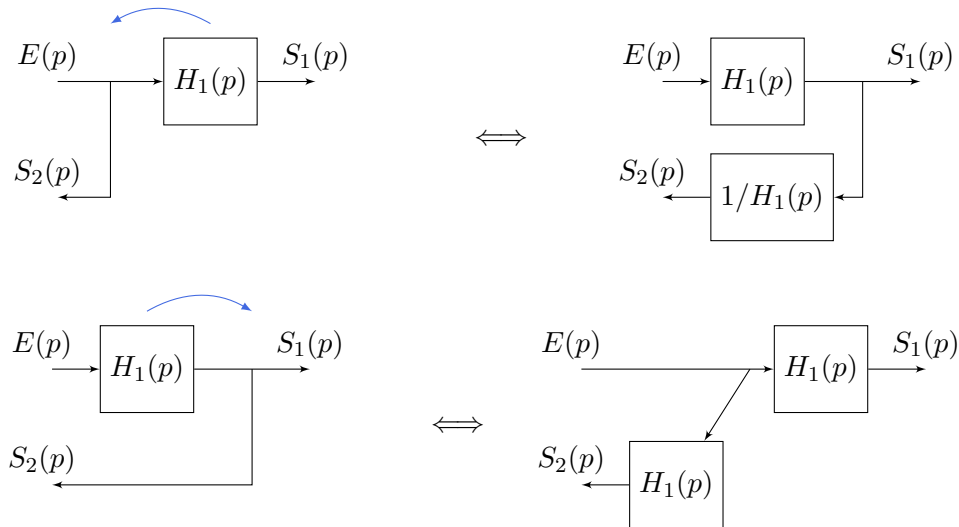
$$\left. \begin{array}{l} Y_1(p) = H_1(p)X(p) \\ Y_2(p) = H_2(p)X(p) \\ Y(p) = Y_1(p) - Y_2(p) \end{array} \right\} \Rightarrow Y(p) = (H_1(p) - H_2(p))X(p)$$

La fonction de transfert globale s'écrit donc : $H(p) = H_1(p) - H_2(p)$

3.3.3 Déplacer un bloc avant ou après un sommateur

Pour vérifier qu'il y a équivalence entre les deux schémas, il faut vérifier la présence des mêmes blocs entre l'entrée $E_1(p)$ et la sortie $S(p)$, ainsi qu'entre l'entrée $E_2(p)$ et la sortie de $S(p)$ sur le schéma initial et le schéma modifié.

3.3.4 Déplacer un bloc avant ou après une jonction



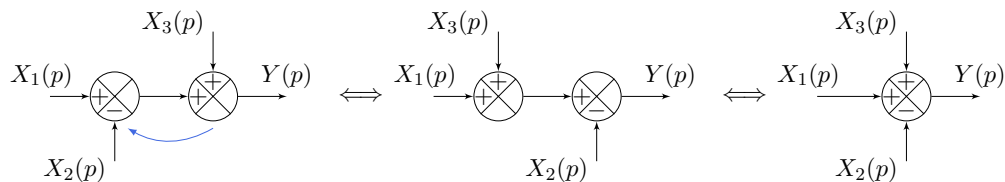
Pour vérifier qu'il y a équivalence entre les deux schémas, il faut vérifier la présence des mêmes blocs entre l'entrée $E(p)$ et la sortie $S_1(p)$, ainsi qu'entre l'entrée $E(p)$ et la sortie de $S_2(p)$ sur le schéma initial et le schéma modifié.

3.3.5 Inversion de sommateurs ou de jonctions

Comme les grandeurs avant et après une jonction sont identiques, deux jonctions successives peuvent être inversées.



La somme étant associative, deux sommateurs peuvent être inversés. Les trois schémas suivants sont équivalents.



Sur ces trois schémas, $Y(p) = X_1(p) - X_2(p) + X_3(p)$.

**Remarque**

L'inversion d'un sommateur et d'une jonction n'est pas possible *à priori*.

3.3.6 Retour sur l'exemple du bras de robot

On cherche à déterminer la fonction de transfert globale du bras de robot, $FTG(p) = \frac{\Omega(p)}{\Omega_c(p)}$.

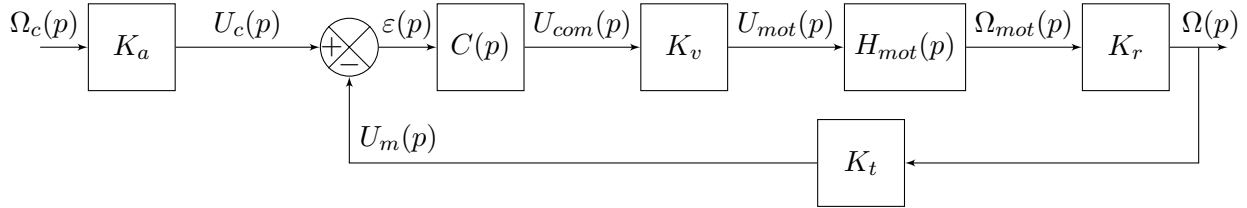


FIGURE 8 – Schéma-blocs de l'asservissement en vitesse angulaire d'un bras de robot.

Méthode par réduction

Le schéma-bloc de la FIGURE 8 présente un bloc en série avec une boucle.

En appliquant la formule de Black, la fonction de transfert de la boucle est :

$$\frac{\Omega(p)}{U_c(p)} = \frac{C(p)K_v H_{mot}(p)K_r}{1 + C(p)K_v H_{mot}(p)K_r K_t}$$

La fonction de transfert globale est donc : $FTG(p) = \frac{\Omega(p)}{\Omega_c(p)} = K_a \frac{C(p)K_v H_{mot}(p)K_r}{1 + C(p)K_v H_{mot}(p)K_r K_t}$

La fonction de transfert en boucle ouverte ne concerne que la boucle et vaut :

$$FTBO(p) = \frac{U_m(p)}{\varepsilon(p)} = C(p)K_v H_{mot}(p)K_r K_t$$

. Méthode analytique

On a directement : $\Omega(p) = K_r H_{mot}(p)K_v C(p) (K_a \Omega_c(p) - K_t \Omega(p))$

Donc : $(1 + C(p)K_v H_{mot}(p)K_r K_t)\Omega(p) = K_r H_{mot}(p)K_v C(p)K_a \Omega_c(p)$

D'où : $FTG(p) = \frac{\Omega(p)}{\Omega_c(p)} = \frac{K_a C(p)K_v H_{mot}(p)K_r}{1 + C(p)K_v H_{mot}(p)K_r K_t}$

Il reste au final à remplacer les fonctions de transfert par leurs expressions en fonction de p pour obtenir une expression simplifiée de la fonction de transfert globale :

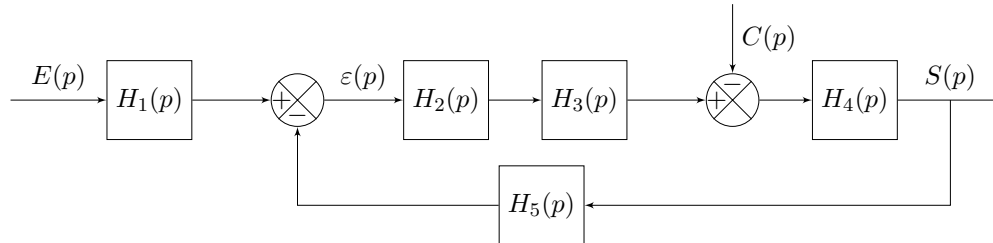
$$FTG(p) = \frac{K_a C K_v K_m K_r}{1 + \tau_m p + C K_v K_m K_r K_t}$$

On peut mettre cette fonction de transfert sous forme canonique et constater que la fonction de transfert globale est d'ordre 1 :

$$FTG(p) = \frac{K}{1 + \tau p} \quad \text{avec} \quad K = \frac{K_a C K_v K_m K_r}{1 + C K_v K_m K_r K_t} \quad \text{et} \quad \tau = \frac{\tau_m}{1 + C K_v K_m K_r K_t}$$

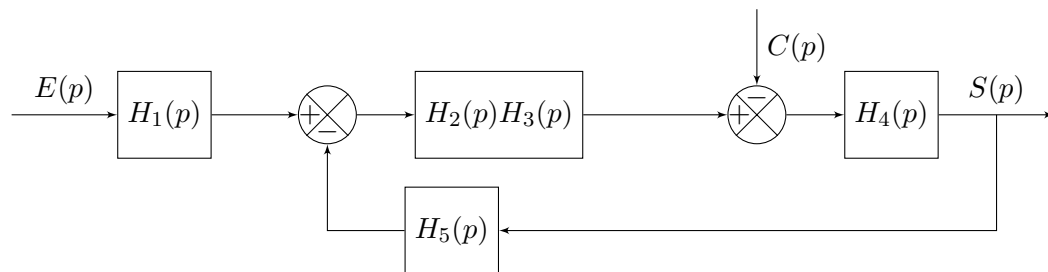
3.4 Application

Exemple : Déterminons la fonction de transfert globale du schéma-blocs suivant

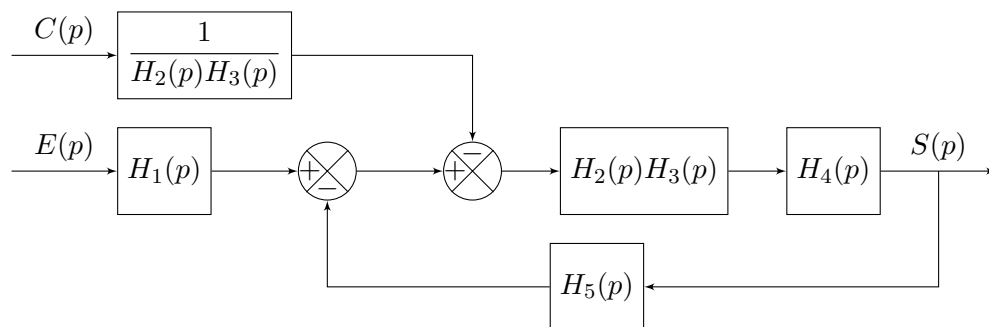


Méthode graphique : manipulation de schéma-blocs

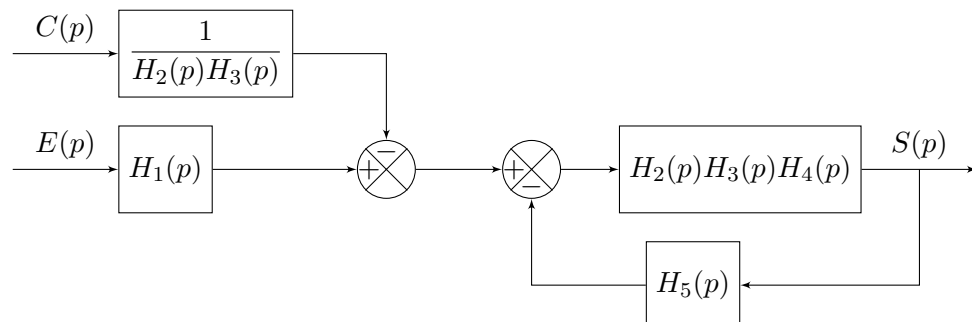
- Regroupons les deux blocs en série :



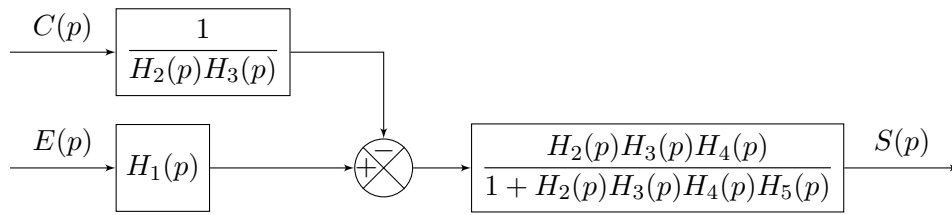
- Passons le bloc $H_2(p)H_3(p)$ après le deuxième sommateur :



- Invertissons les deux sommateurs et regroupons le bloc $H_2(p)H_3(p)$ avec le bloc $H_4(p)$:



- Appliquons la formule de Black sur la partie droite :



- D'où finalement la fonction de transfert globale :

$$S(p) = \frac{H_1(p)H_2(p)H_3(p)H_4(p)}{1 + H_2(p)H_3(p)H_4(p)H_5(p)}E(p) - \frac{H_4(p)}{1 + H_2(p)H_3(p)H_4(p)H_5(p)}C(p)$$

Méthode analytique

$$S(p) = H_4(p) (-C(p) + H_3(p)H_2(p) [-H_5(p)S(p) + H_1(p)E(p)])$$

$$S(p) (1 + H_2(p)H_3(p)H_4(p)H_5(p)) = -H_4(p)C(p) + H_1(p)H_2(p)H_3(p)H_4(p)E(p)$$

$$S(p) = \frac{H_1(p)H_2(p)H_3(p)H_4(p)}{1 + H_2(p)H_3(p)H_4(p)H_5(p)}E(p) - \frac{H_4(p)}{1 + H_2(p)H_3(p)H_4(p)H_5(p)}C(p)$$



Remarque

Cette expression illustre le **principe de superposition** des systèmes linéaires :

- La réponse totale $S(p)$ est la **somme** des contributions de chaque entrée
- Pour $E(p)$ seul : $C(p) = 0 \Rightarrow S_E(p) = \frac{H_1H_2H_3H_4}{1 + H_2H_3H_4H_5}E(p)$
- Pour $C(p)$ seul : $E(p) = 0 \Rightarrow S_C(p) = -\frac{H_4}{1 + H_2H_3H_4H_5}C(p)$
- Le dénominateur $1 + H_2H_3H_4H_5$ est **commun** aux deux cas : les pôles (stabilité) sont identiques quelle que soit l'entrée considérée.